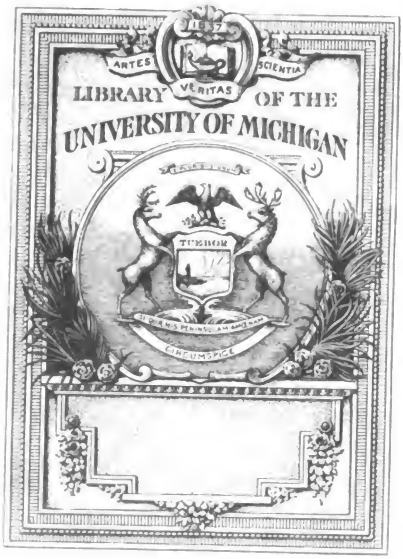
Sc. 317

el. Bicquilley



Digitized by Google

GRAD. R. R. 3
QA
35
.B583
1783

Digitized by Google

Ex. Bicquilley

Digitized by Google

DU CALCUL
DES
PROBABILITÉS.

Digitized by Google

Digitized by Google

DU CALCUL DES PROBABILITÉS.

NOUVELLE ÉDITION.

PAR C. F. BICQUILLEY.

A TOUL,

Chez JOSEPH CAREZ, Imprimeur-Libraire;

Et se vend à PARIS,

Chez DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, Quai des Augustins.

1783.

Digitized by Google

Digitized by Google

Library committee
Roelle
5.22.24
9749

PRÉFACE.

L'ANALYSE & la Géométrie ſont reconnues pour les ſeuls guides qui puiſſent nous conduire sûrement à la vérité ; l'application qui en a été faite de nos jours à divers objets des connoiſſances humaines, a conſidérablement affoibli le regne de l'opinion : les ſciences exactes ont ſuccédé aux ſpéculations vagues, & quelques vérités certaines à une multitude de préjugés aveugles & d'ingénieuſes erreurs. Il y a lieu d'eſpérer que le Génie ne s'arrêtera pas dans ſa courſe, & que la méthode du calcul pourra s'étendre un jour aux objets qui nous en paroiſſent le moins ſuſceptibles, & ſur leſquels il nous importe le plus d'acquérir des notions aſſurées. Les épreuves tentées ſans ſuccès ne prouvent que la difficulté du projet ; elles peuvent même ouvrir la voie à des efforts plus heureux, en éclairant les écueils qui ont cauſé les premiers naufrages.

Nous ne pouvons toutefois nous diſſimuler que la faculté humaine a des bornes qui lui ſont aſſignées par la nature, & qu'il eſt des objets, même d'une importance majeure, ſur leſquels nous ſerons à jamais réduits au doute & à la ſeule vraiſemblance : mais la vraiſemblance, ou la probabilité eſt ſuſceptible de plus eſt de moins : elle a toutes les qualités qui caractériſent la grandeur, des rapports d'égalité & d'inégalité, des termes de *Maximum*

Digitized by Google

& de *Minimum*, qui ſont la certitude abſolue d'une part, & l'impoſſibilité reconnue d'autre : elle eſt donc du reſſort de la Géométrie, & ſa quantité peut être évaluée par le calcul.

La théorie des Probabilités ébauchée par des Géometres célebres m'a paru ſuſceptible d'être approfondie, & de faire partie de l'enſeignement élémentaire : j'ai penſé qu'un traité ne ſeroit point indigne d'être offert au public, qui pourroit enrichir de nouvelles vérités cette matiere intéreſſante, & la mettre à la portée du plus grand nombre des lecteurs.

Ce livre eſt diviſé en ſept chapitres : Dans le premier, les principes fondamentaux ſont précédés de définitions exactes du *certain*, du *poſſible* & de l'*impoſſible*, du *probable* & autres expreſſions de même eſpece plus fréquemment employées que bien conçues. Les trois ſuivants renferment une théorie analytique de la plus grande généralité, dans laquelle j'ai tâché de réunir la méthode, la briéveté & la clarté ; appliquant chaque propoſition à quelques exemples qui puiſſent à-la-fois éclaircir le principe & en indiquer les uſages.

Le cinquieme chapitre montre, par des exemples particuliers, l'application qui peut ſe faire de la théorie établie par les précédents, pour réſoudre les queſtions relatives à la plupart des jeux, & la maniere d'appliquer à la recherche

Digitized by Google

des probabilités les principes de la géométrie élémentaire ou transcendante, lorsque les questions proposées en sont susceptibles. Le sixieme chapitre établit démonstrativement la maniere de suppléer à l'analyse par l'expérience, dans la recherche des probabilités, lorsque les questions proposées ne sont pas de nature à être soumises à un calcul exact. Le septieme est un essai sur le moyen d'estimer l'influence que peuvent avoir sur la probabilité des faits, les témoignages rendus pour ou contre ces faits.

Je suis extrêmement éloigné de prétendre avoir porté la connoissance des probabilités au degré de perfection où le génie & l'expérience pourront l'élever un jour : mais quoique les essais d'un amateur ne puissent entrer en comparaison avec les chefs-d'œuvre des maîtres ; on ne jugera pas mon travail inutile, si j'ai fait quelques pas dans la carriere, & concouru au progrès de l'art de conjecturer, & d'assujettir l'incertitude à des regles certaines.

FAUTES A CORRIGER.

Page 2 §. *III*, *ligne 2*, états des choses, *lisez* états de choses.
Page 6, §. *XI*, *ligne 8*, 1 : 6. *lisez* 1 : 5.
Page 11, §. *XXV*, *dans la derniere accolade*, *mettez le trait qui est entre le* p *&* l's, *entre le* q *&* p.
Page 73, §. *XCIV*, *ligne 9*, tons, *lisez* tous.
Page 135, *ligne 8*, proportions, *lisez* propositions.
Page 151, §. *CLXIX*, *ligne 5*, $\frac{a}{b}$ exprimera, *lisez* $\frac{b}{a}$ exprimera.

Digitized by Google

TABLE
DES
CHAPITRES.

CHAPITRE I. *Définitions, Notions, & Principes fondamentaux*, page 1
CHAP. II. *De la Probabilité des hazards qui ont lieu dans le concours simultané de plusieurs chances*, 26
CHAP. III. *De la Probabilité des hazards qui dérivent du cours successif de plusieurs chances, dans un ordre déterminé*, 40
CHAP. IV. *De la Probabilité des hazards dans le cas de plusieurs épreuves*, 81
CHAP. V. *De l'évaluation des Probabilités par l'analyse des questions proposées*, 111
CHAP. VI. *De l'évaluation des Probabilités par les expériences ou observations*, 134
CHAP. VII. *De l'Influence des témoignages sur les Probabilités*, 150

Fin de la Table.

Digitized by Google

DU CALCUL DES PROBABILITÉS.

CHAPITRE I.

Définitions, Notions, & Principes fondamentaux.

§. I.

PARMI les divers mouvements, actions, ou états de choſes qui ſont ſous nos yeux, il en eſt dont nous ſommes en état d'aſſigner avec certitude le réſultat, la conſéquence ou l'effet; ſoit d'après des expériences multipliées d'autres mouvements, actions, ou états de choſes ſemblables; ſoit d'après une connoiſſance raiſonnée des loix qui les dirigent : ces effets, conſéquences, ou réſultats ſe nomment *Certains*.

Digitized by Google

II.

IL EST d'autres mouvements, actions, ou états de choſes dont nous ne ſommes pas en état d'aſſigner avec certitude les réſultats, conſéquences, ou effets : ces ſortes de réſultats, conſéquences, ou effets ſe nomment *Hazards*.

III.

ENTRE les divers mouvements, actions, ou états des choſes dont nous ne ſommes pas en état d'aſſigner avec certitude la conſéquence ou l'effet, il en eſt auxquels nous ſommes en état d'aſſigner divers réſultats que nous nommons *Poſſibles*; entre leſquels nous ſommes aſſurés que l'effet ignoré ſe trouve, & hors deſquels nous ſommes également aſſurés que cet effet ne ſe trouve point.

Pour rendre ceci ſenſible par un exemple, ſuppoſons que Pierre agite dans un cornet deux dés à jouer ordinaires pour les projetter aveuglément ſur une table : j'ignore le réſultat de cet acte ; c'eſt-à-dire, le point qui ſera amené par Pierre : mais je ſais qu'il y a 36 réſultats que je nomme poſſibles, parmi leſquels je ſuis certain que ce point ſe trouve, & hors deſquels je ſuis auſſi certain que ce point ne ſe trouve pas; car le dé *A* peut amener ſix points différents ; & à chaque point amené par le dé *A*, le dé *B* peut amener ſix points différents : d'où je vois que le jet de deux dés à jouer ordinaires a 6 fois 6 ou 36 réſultats poſſibles, & qui ſont les ſeuls poſſibles.

IV.

J'APPELLE deux ou pluſieurs réſultats *également poſſibles*, lorſqu'il n'y a aucune raiſon qui me faſſe eſpérer l'événement de l'un plus que l'événement de l'autre.

Digitized by Google

Ainſi dans le jet de deux dés, le point 5 & 4 & le point 3 & 1 ſont également poſſibles, parce qu'ils peuvent être amenés chacun de deux manieres; ſavoir, le 1r. lorſque le dé *A* amene 5, & le dé *B*, 4; & lorſque le dé *A* amene 4 & le dé *B*, 5: le 2e. lorſque le dé *A* amene 3 & le dé *B*, 1; & lorſque le dé *A* amene 1, & le dé *B*, 3.

Le point 5 & 4 & le point terne ne ſont pas également poſſibles, parce que le 1r. peut être, comme on vient de voir, amené de deux manieres: au lieu que le 2e. ne peut être amené que d'une ſeule maniere; ſavoir, quand chaque dé amene le point 3.

Le point 6 & le point 8 ſont également poſſibles, parce qu'ils peuvent tous deux être amenés de cinq manieres; ſavoir, le point 6 par 5 & 1, 4 & 2, 3 & 3, 2 & 4, 1 & 5: & 8 par 6 & 2, 5 & 3, 4 & 4, 3 & 5, 2 & 6.

Le point 7 & le point 8 ſont inégalement poſſibles: parce que le point 7 peut être amené de ſix manieres différentes; ſavoir, par 6 & 1, 5 & 2, 4 & 3, 3 & 4, 2 & 5, 1 & 6; au lieu que le point 8 ne peut être amené que de cinq manieres, comme on vient de le voir.

V.

Nous appellerons *Chances* tous les réſultats également poſſibles parmi leſquels on eſt aſſuré qu'un hazard déſigné ſe trouve, & hors deſquels on eſt aſſuré qu'il ne ſe trouve pas: ainſi dans le jet de deux dés, il y a trente-ſix *Chances* parmi leſquelles ſe trouvent tous les hazards qui peuvent en réſulter.

VI.

Il ſuit de cette définition des *Chances*, que lorſque dans le calcul des hazards, on voudra évaluer la ſomme de la totalité ou d'une partie quelconque

Digitized by Google

des *Chances* dont ces hazards ſont partie ; il faudra toujours avoir attention à ce que les réſultats dont on fera l'énumération ſoient tous également poſſibles.

VII.

On peut conclure des définitions ci-deſſus, qu'il n'y a point de hazard abſolu ; que ce mot eſt relatif à l'ignorance de celui qui l'emploie : & comme tout ſe meut dans la nature ſuivant des loix conſtantes & des forces données qui déterminent le réſultat de tout acte, mouvement, ou état de choſes ; il n'y auroit point de hazard, & tout ſeroit certain pour l'être intelligent qui connoîtroit parfaitement ces loix.

On peut dire la même choſe de la Poſſibilité, qui n'eſt point une qualité intrinſeque aux faits appellés poſſibles, mais ſeulement l'expreſſion de l'ignorance où nous ſommes ſi ces faits ont exiſté ou n'ont pas exiſté, s'ils exiſtent ou s'ils n'exiſtent pas, s'ils exiſteront ou s'ils n'exiſteront pas. En attachant à l'idée de la poſſibilité d'un fait celle d'une cauſe capable de le faire exiſter, on tomberoit dans une erreur manifeſte ; car une véritable cauſe ne peut exiſter ſans ſon effet, & dans cette ſuppoſition, il n'y auroit rien de poſſible que ce qui exiſte réellement.

VIII.

Nous nous déterminons fréquemment dans la conduite de la vie ſur la ſuppoſition de faits ou événements dont nous ne ſommes pas en état d'affirmer la réalité avec certitude, & qui relativement à nous ſont ſeulement poſſibles : la ſuppoſition que nous faiſons que ces faits ont exiſté, qu'ils exiſtent, ou qu'ils exiſteront, ſe nomme *Préſomption* ou *Conjecture :* ainſi préſumer ou conjecturer,

Digitized by Google

eſt ſuppoſer réel un fait qui relativement à nous n'eſt que poſſible, au riſque de nous tromper ſi la ſuppoſition ſe trouve fauſſe, & de manquer le but que nous nous ſommes propoſé en la faiſant.

IX.

Un *Pari* ou *Gageure* eſt un contrat par lequel deux parties engagent chacune reſpectivement une ſomme d'argent déterminée, l'une à l'exiſtence, l'autre à la non-exiſtence d'un événement poſſible ſpécifié.

Par exemple : Si Pierre agitant dans un cornet deux dés à jouer, pour les jetter ſur une table, s'engage à payer un écu à Paul, au cas où il amèneroit Doublet : & que Paul s'engage réciproquement à payer 15 l. à Pierre, s'il amene un point ſimple : cette convention eſt un pari.

X.

La *Probabilité* d'un hazard eſt le rapport du nombre des chances qui donnent ce hazard, au nombre total des chances dont ce même hazard fait partie.

Par exemple : Dans le jet de deux dés à jouer ordinaires :

La probabilité du point 12 eſt $\frac{1}{36}$:

Celle du point 11 eſt $\frac{2}{36}$ ou $\frac{1}{18}$:

Celle du point 10, $\frac{3}{36}$, ou $\frac{1}{12}$:

Celle du point 9, $\frac{4}{36}$, ou $\frac{1}{9}$:

Celle du point 8, $\frac{5}{36}$: Celle du point 7, $\frac{6}{36}$, ou $\frac{1}{6}$:

Celle de Quine $\frac{1}{36}$: Celle de 5 & 4, $\frac{2}{36}$, ou $\frac{1}{18}$:

Celle de Doublet, $\frac{6}{36}$, ou $\frac{1}{6}$:

Celle de Point-ſimple, $\frac{30}{36}$, ou $\frac{5}{6}$:

Digitized by Google

Parce que dans les 36 chances dépendantes du jet des deux dés, il y en a 1 qui donne le point 12; 2 qui donnent 11; 3 qui donnent 10; 4 qui donnent 9; 5 qui donnent 8; 6 qui donnent 7; 1 qui donne Quine; 2 qui donnent 5 & 4; 6 qui donnent Doublet; & 30 qui donnent Point-simple.

XII.

Il suit des Définitions précédentes, que les Probabilités des divers hazards dépendants d'un acte, mouvement ou état de choses donné, sont entre elles comme les nombres de chances qui les donnent :

Par exemple : Dans le jet de deux dés, la probabilité du Doublet est à celle du point simple, comme 6 est à 30, ou :: 1 : 5.

XIII.

En général : soit $\frac{n}{m}$ la probabilité d'un hazard: cette probabilité devient d'autant $\left\{\begin{matrix}\text{plus grande}\\\text{moindre}\end{matrix}\right.$, que n $\left\{\begin{matrix}\text{augmente}\\\text{diminue}\end{matrix}\right.$, le dénominateur m restant le même : & si $n = m$, ou $\frac{n}{m} = 1$, l'événement est certain; parce que dans ce cas, toutes les chances donnent l'événement : & si $n = o$, ou $\frac{n}{m} = o$, l'événement est impossible, ou ce qui est de même, la non-existence de cet événement est certaine.

XIV.

Il suit de-là que la probabilité ne peut jamais être plus grande que l'unité, ni moindre que o;

Digitized by Google

c'eſt-à-dire, négative : mais qu'elle peut paſſer par toutes les valeurs & les degrés de la grandeur, intermédiaires entre o & 1.

XIV.

NOMMANT toujours $\frac{n}{m}$, la probabilité d'un hazard, $\frac{m-n}{m}$ eſt la probabilité contraire ; c'eſt-à-dire, la probabilité que ce hazard n'aura pas lieu : ce qui eſt évident ; car n repréſentant le nombre des chances qui donnent ce hazard, $m-n$ eſt viſiblement le nombre des chances qui ne le donnent point.

XV.

LA probabilité d'un hazard quelconque étant ajoutée à la probabilité contraire, donne toujours l'unité pour ſomme ; car $\frac{n}{m} + \frac{m-n}{m} = 1$; ce qui eſt d'ailleurs évident, puiſqu'il eſt toujours certain qu'un hazard quelconque arrivera ou n'arrivera pas.

XVI.

UNE ſorte de mouvement ou d'action qui a pluſieurs réſultats poſſibles, peut être réitérée deux, trois, quatre, ou un plus grand nombre de fois. Nous appellerons *Épreuves* chacune de ces répétitions.

Par exemple : Si dans un ſac qui renferme 90 boules mêlées & marquées chacune d'un numéro différent, telles que celles qu'on emploie dans le jeu de Loto, je prends aveuglément & ſans choix cinq de ces boules, les remettant enſuite dans le ſac, & que je réitere pluſieurs fois cette action ; ces répétitions ſe nommeront *Épreuves*.

Digitized by Google

XVII.

La probabilité d'un fait eſt auſſi celle de la propoſition qui affirme ce fait : de maniere qu'un fait & la propoſition qui en affirme l'exiſtence, ſont plus ou moins probables, ou croyables, ou vraiſemblables, ſelon que le rapport du nombre des chances qui donnent ce fait au nombre total des chances dont il fait partie, s'approche ou s'éloigne plus de l'unité. Il faut toutefois ſe ſouvenir que la vérité & la fauſſeté des faits & des propoſitions qui les affirment ne ſont néceſſairement déterminées par la probabilité, que dans les ſeuls cas où la probabilité égale *o* ou *1* ; hors de là, la probabilité ne conclut rien à la rigueur ſur la réalité des événements, & le moins probable eſt quelquefois celui qui arrive : il eſt cependant certain que la fréquence des retours des mêmes faits dans une multitude d'épreuves, eſt à peu près proportionnelle à la probabilité de ces faits ; que les conjectures nous expoſent d'autant moins à l'erreur, & nous trompent d'autant plus rarement que les faits préſumés ſont plus probables.

XVIII.

On nomme *Pari équitable*, le pari dans lequel les miſes ou ſommes engagées par les Parieurs, ſont entr'elles comme les probabilités des hazards à la réalité deſquels ces ſommes ſont engagées.

Ainſi, ſuppoſant que Pierre parie une ſomme s pour un hazard dont la probabilité eſt $\frac{n}{m}$; la miſe de Paul qui parie que cet événement n'aura pas lieu, doit, pour que le pari ſoit équitable, être $s \cdot \frac{m-n}{n}$: car nommant x la miſe de Paul, on aura cette proportion ; la probabilité du hazard pour le-

Digitized by Google

quel Pierre parie, eſt à la probabilité du hazard pour lequel Paul parie, comme la miſe de Pierre eſt à la miſe de Paul : ou ce qui eſt de même, $\frac{n}{m} : \frac{m-n}{m} :: s : x$; d'où l'on déduit $x = s \cdot \frac{m-n}{n}$.

X I X.

Dans le cas du pari équitable, la miſe d'un des parieurs, & la probabilité d'un des hazards étant données, on peut en déduire aiſément la miſe de l'autre parieur, & la probabilité de l'autre hazard. Ainſi, ſi la probabilité du hazard pour lequel Pierre parie eſt $\frac{1}{6}$, & la miſe de Paul 15 l. ; la probabilité de l'événement pour lequel Paul parie ſera $\frac{5}{6}$, & la miſe de Pierre 3 l.

X X.

Dans un pari équitable ; ſi la probabilité de chaque hazard eſt $\frac{1}{2}$, les miſes doivent être égales ; & réciproquement ſi la probabilité eſt $\frac{1}{2}$, & les miſes égales, le pari eſt équitable.

X X I.

Remarquez que l'équité d'un pari ſuppoſe que les probabilités des hazards qui ſont l'objet du pari, ſont également évaluées par les parieurs : autrement l'équité ſeroit détruite, même au moral ; & elle le ſeroit au plus haut point, ſi l'un des parieurs étoit certain de l'événement pour lequel il parie.

X X I I.

Remarquez encore que cette équité numérique

Digitized by Google

des paris emporte rarement égalité d'avantages & de déſavantages phyſiques aux parieurs ; parce que les avantages & déſavantages phyſiques attachés à tels gains ou à tels pertes, ſont, dans la condition humaine, rarement proportionnels aux ſommes gagnées ou perdues. Un homme, par exemple, dont la fortune ſe borneroit à 10000 l. qui ſuffiroient à tous ſes beſoins, joueroit avec un extrême déſavantage, quoiqu'à jeu égal, cette ſomme contre un millionnaire pour qui le gain ou la perte de cette ſomme ſont preſque de nulle conſéquence, vu qu'il ne peut ſe trouver compenſation de commodité & d'incommodité entre l'acquiſition du ſuperflu & la perte du néceſſaire ; le pari ne pourroit donc devenir équitable, dans ce ſens, que dans le cas tout au plus où les parieurs ſeroient dans des poſitions de fortunes égales, & où leur bien-être ſeroit indépendant des ſommes engagées au pari.

XXIII.

On nomme Probabilité compoſée celle qui eſt le produit de pluſieurs autres probabilités : ainſi la probabilité $\frac{nqsu}{mprt}$ eſt compoſée des probabilités $\frac{n}{m}, \frac{q}{p}, \frac{s}{r}, \frac{u}{t}$.

XXIV.

Théoreme. Deux actes, mouvements ou états de choſes différents étant donnés ; du premier, deſquels dépend un hazard, dont la probabilité eſt $\frac{n}{m}$, & du ſecond, deſquels dépend un hazard dont la probabilité eſt $\frac{q}{p}$; je dis que la probabilité que

Digitized by Google

ces hazards arriveront tous deux eſt compoſée des probabilités de ces deux hazards, c'eſt-à-dire, que cette probabilité eſt $\frac{nq}{mp}$.

DÉMONST. 1°. Chacune des m chances dont le premier hazard fait partie, peut arriver avec chacune des p chances dont le ſecond hazard fait partie; ainſi le nombre des chances, dont le concours des deux hazards fait partie, eſt mp. 2°. Chacune des n chances qui donnent le premier hazard peut arriver avec chacune des q chances qui donnent le ſecond hazard : ainſi le nombre des chances qui donnent à la fois les deux hazards, eſt nq; donc la probabilité que les deux hazards arriveront, eſt $\frac{nq}{mp}$. (*X.*) *C. Q. F. D.*

XXV.

COROLL. I. Étant donnés 3, 4, 5, ou un plus grand nombre d'actes, mouvements ou états de choſes différents, du

$\left\{\begin{array}{l}1^{er}.\\2^{e}.\\3^{e}.\\4^{e}.\\\ldots..\end{array}\right.$ deſquels dépend un hazard dont la probabilité eſt

$\left\{\begin{array}{l}\frac{n}{m}\\\frac{q}{p}\\\frac{s}{r}\\\frac{u}{t}\\\ldots.\end{array}\right.$; Je dis que la probabilité du concours de tous ces hazards eſt compoſée de toutes leurs

Digitized by Google

probabilités particulieres : c'eſt-à-dire, qu'elle eſt $\frac{nqsu....}{mprt....}$.

Car la probabilité du concours des deux premiers hazards eſt, comme on vient de voir, $\frac{nq}{mp}$; ainſi la probabilité du hazard naiſſant du concours des deux premiers hazards, & la probabilité du troiſieme hazard, c'eſt-à-dire, $\frac{nq}{mp}$ & $\frac{s}{r}$ ſont les deux probabilités compoſantes de celle du concours des trois premiers hazards, qui par conſéquent ſera $\frac{nqs}{mpr}$: on prouvera de même que la probabilité que le hazard formé par le concours des trois premiers hazards, & le quatrieme hazard arriveront, eſt $\frac{nqs}{mpr} \cdot \frac{u}{t}$ ou $\frac{nqsu}{mprt}$; ainſi de ſuite.

XXVI.

COROLL. II. Étant donné un nombre N, d'actes, mouvements, ou états de choſes ſemblables, deſquels dépendent divers hazards dont les probabilités ſont $\frac{n}{m}$, $\frac{p}{m}$, $\frac{q}{m}$ .... au nombre N : la probabilité que le $\begin{cases} 1^{er}. \\ 2^{e}. \\ 3^{e}. \\ \dots \end{cases}$ de ces actes amenera le hazard dont la probabilité eſt $\begin{cases} \frac{n}{m} \\ \frac{p}{m} \\ \frac{q}{m} \\ \dots \end{cases}$, eſt $\frac{npq....}{m^{N}}$:

& si $n=p=q=\ldots\ldots$, la probabilité du concours de tous ces hazards est $\left(\frac{n}{m}\right)^N$.

XXVII.

Exemples. Pierre, Jacques & Jean jettent chacun sur une table deux dés à jouer ordinaires : la probabilité que Pierre amenera un Doublet, Jacques un Point simple, & Jean le Point 7, est $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$ ou $\frac{5}{216}$.

Je jette quatre fois de suite sur une table deux dés à jouer ordinaires; la probabilité que j'amenerai toutes les quatre fois un Doublet, est $\frac{1}{6^4}$ ou $\frac{1}{1296}$: celle d'amener toutes les quatre fois Sonnet, est $\frac{1}{36^4}$ ou $\frac{1}{1679616}$.

XXVIII.

Les actes, mouvements ou états de choses desquels dépendent les hazards dont on cherche la probabilité, sont nommés les causes ou les signes de ces hazards, selon qu'ils peuvent être présumés ou les produire ou les accompagner : au premier cas, les hazards se nomment *Effets*, au second cas, ils se nomment *choses signifiées*. Dans l'un & l'autre cas, la certitude de l'existence de la cause ou du signe peut seule laisser à l'effet ou la chose signifiée le degré de probabilité qui lui est propre: ainsi, la probabilité que Pierre amenera Sonnet, n'est $\frac{1}{36}$, que dans le cas où il est certain que Pierre jettera deux dés à jouer sur une table : & la probabilité que Pierre amenera Sonnet, n'est $\frac{1}{6}$, que dans le cas où il est certain que Pierre amenera

Digitized by Google

un Doublet; réciproquement la certitude de l'existence de l'effet ou signification peut seule laisser à la cause ou signe le degré de probabilité qui lui est propre : mais si la cause ou signe est incertain d'une part; que d'autre part l'effet ou signification soit encore incertain, alors la probabilité de l'existence simultanée de la cause & de l'effet, ou du signe & de la chose signifiée, est composée des probabilités particulieres de la cause & de l'effet ou du signe & de la chose signifiée; c'est-à-dire, le produit de ces probabilités particulieres.

Ainsi, nommant $\frac{n}{m}$ la probabilité que Pierre jettera deux dés à jouer sur une table : la probabilité qu'il amenera un doublet, est $\frac{n}{6m}$; & la probabilité que ce Doublet sera Sonnet, est $\frac{n}{m} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ ou $\frac{n}{36m}$.

XXIX.

Comme les nombres nommés *Ordinaux* sont d'un très-fréquent usage, tant dans la Théorie que dans la Pratique du Calcul des Probabilités, nous avons cru utile & commode pour les lecteurs de donner ici une notice abrégée de ces sortes de nombres : c'est l'objet des Propositions suivantes.

XXX.

L'unité répétée indéfiniment forme une suite de nombres qu'on nomme *Premiers* ou *Constants*. Ainsi

1, 1, 1, 1, 1, 1, &c.

est la suite des nombres *Premiers* ou *Constants*.

Si sous chacun des nombres premiers j'écris la

Digitized by Google

ſomme de ce nombre & de tous ceux qui le précedent vers la gauche, j'aurai la ſuite

1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.

qui eſt celle des nombres *Seconds* ou *Naturels*.

Si ſous chacun des nombres Seconds ou Naturels, j'écris la ſomme de ce nombre & de tous les nombres Naturels qui le précedent vers la gauche, j'aurai la ſuite

1, 3, 6, 10, 15, 21, &c.

qui eſt celle des nombres *Troiſiemes* ou *Triangulaires*.

Si ſous chacun des nombres Troiſiemes on écrit la ſomme de ce nombre & de tous ceux qui le précedent vers la gauche, j'aurai la ſuite

1, 4, 10, 20, 35, 56, &c.

qui eſt celle des nombres *Quatriemes* ou *Pyramidaux*.

Si ſous chacun des nombres Pyramidaux, j'écris la ſomme de ce nombre & de tous ceux qui le précedent vers la gauche, j'aurai la ſuite

1, 5, 15, 35, 70, 126, &c.

qui eſt celle des nombres *Cinquiemes*.

En ſuivant la même génération de nombres, on trouvera ſucceſſivement la ſuite des nombres *Sixiemes*, celle des nombres *Septiemes*, &c. ainſi de ſuite.

Les nombres formés de cette maniere ſe nomment en général *Nombres Ordinaux*.

XXXI.

Coroll. Il ſuit de cette définition qu'un nombre ordinal, dont le rang dans ſa ſuite eſt marqué par n, & l'ordre entre les ſuites par m, eſt égal à la

Digitized by Google

ſomme des premiers nombres ordinaux pris au nombre n, de l'ordre indiqué par $m-1$.

Par Ex. le vingtieme nombre triangulaire eſt égal à la ſomme des vingt premiers nombres naturels; le ſeptieme nombre de l'ordre cinquieme eſt égal à la ſomme des ſept premiers nombres pyramidaux, ainſi des autres.

XXXII.

REMARQUE I. Un nombre ordinal, dont l'ordre eſt marqué par m, & dont le rang dans ſa ſuite eſt marqué par n, eſt égal au nombre ordinal, dont l'ordre eſt marqué par n, & dont le rang dans ſa ſuite eſt marqué par m.

Par Ex. Le ſeptieme nombre triangulaire eſt égal au troiſieme nombre de l'ordre ſeptieme, le troiſieme nombre pyramidal eſt égal au quatrieme nombre triangulaire, & ainſi des autres.

XXXIII.

REMARQUE II. Un nombre

$$\left\{\begin{array}{l}1^{er}.\\2^{e}.\\3^{e}.\\4^{e}.\\\ldots..\end{array}\right.$$ du rang n, eſt au nombre $$\left\{\begin{array}{l}2^{e}.\\3^{e}.\\4^{e}.\\5^{e}.\\\ldots.\end{array}\right.$$ du même

rang, comme $\left\{\begin{array}{l}1\\2\\3\\4\\\ldots.\end{array}\right.$ eſt à $\left\{\begin{array}{l}n\\n+1\\n+2\\n+3\\\ldots\ldots\end{array}\right.$

Ainſi de ſuite, & en général:

Le nombre ordinal de l'ordre marqué par m, & dont le rang dans ſa ſuite eſt marqué par n, eſt au

au nombre ordinal dont l'ordre eſt marqué par $m+1$, & dont le rang dans ſa ſuite eſt auſſi marqué par n, comme $m : \overline{n+m-1}$.

XXXIV.

PROBLÊME I. Trouver l'expreſſion générale en m & n du nombre ordinal de l'ordre exprimé par m, & dont le rang dans la ſuite eſt exprimé par n.

SOLUTION. Nommant

$\left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ \ldots\ldots \end{matrix}\right.$ le nombre $\left\{\begin{matrix} \text{naturel} \\ \text{triangulaire} \\ \text{pyramidal} \\ \text{cinquieme} \\ \ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\}$ du rang marqué par n ; on a (XXXIII.)

$a : b :: 2 : \overline{n+1}$; mais $a = n$; donc $b = \frac{n.\overline{n+1}}{1.2}$;

b ou $\frac{n.\overline{n+1}}{1.2} : c :: 3 : \overline{n+2}$; donc $c = \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}$;

c ou $\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3} : d :: 4 : \overline{n+3}$; donc $d = \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{1.2.3.4}$; ainſi de ſuite : d'où l'on voit qu'en général le nombre ordinal de l'ordre m & du rang n, eſt $\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}\ldots\ldots\overline{m+n-3}.\overline{m+n-2}}{1.2.3.4.5\ldots\ldots\ldots\overline{m-2}.\overline{m-1}}$

ou ce qui eſt de même (XXXII.)

$\frac{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}\ldots\ldots\overline{m+n-3}.\overline{m+n-2}}{1.2.3.4.5.6\ldots\ldots\overline{n-2}.\overline{n-1}}$ *C. Q. F. T.*

Digitized by Google

XXXV.

COROLL. La ſomme des premiers nombres ordinaux de l'ordre m, pris au nombre n, eſt

$$\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\ldots.\overline{n+m-1}}{1.2.\ldots\ldots.\overline{m-1}.m}; \text{ (XXXI.)}$$

Par ex. La ſomme des quatre premiers nombres triangulaires eſt $\frac{4.5.6}{1.2.3}$, ou 20 : la ſomme des 25 premiers nombres de l'ordre huitieme, eſt $\frac{25.26.27.\ldots.31.32}{1.2.3.4.5.6.7.8}$ ou 10518300.

la ſomme des treize premiers nombres de l'ordre douzieme, eſt $\frac{13.14.15.\ldots.24}{1.2.\ldots.11.12}$ ou 2704156.

XXXVI.

REMARQUE III. Si l'on diviſe ſucceſſivement l'unité par

$$\left\{\begin{array}{ll} 1-x, & \text{ou } \frac{1}{1-x} \\ 1-2x+x^2, & \text{ou } \frac{1}{1-x}^2 \\ 1-3x+3x^2-x^3, & \text{ou } \frac{1}{1-x}^3 \\ & \frac{1}{1-x}^4 \\ & \ldots\ldots. \\ & \frac{1}{1-x}^m \end{array}\right. ; \text{ l'on}$$

trouvera pour quotient la ſuite infinie

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \&c. \\ 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \&c. \\ 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + \&c. \\ 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + \&c. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1 + mx + \frac{m.\overline{m+1}}{1.2}.x^2 + \frac{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}}{1.2.3}.x^3 + \&c. \end{array}\right.$$

d'où l'on voit qu'en général la suite infinie

$$1 + mx + \frac{m.\overline{m+1}}{1.2}.x^2 + \frac{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}}{1.2.3}.x^3 + \&c. = \frac{1}{\overline{1-x}}^m.$$ ou autrement

si on multiplioit par une quantité x moindre que l'unité, tous les termes à l'infini de la suite des nombres ordinaux de l'ordre m, savoir chacun des termes par la puissance de x du dégré indiqué par le rang que ce terme a dans la suite, moins 1; la somme de tous ces termes seroit le quotient de l'unité divisée par la puissance du degré m de la quantité $1 - x$.

XXXVII.

Probleme II. Trouver l'expression générale en m, n, p, de la somme des premiers nombres ordinaux de l'ordre m, pris au nombre n, & élevés chacun à la puissance du degré marqué par $p + 1$.

Sol. Pour abréger les calculs, j'exprimerai, par

$$\left\{\begin{array}{l} \int n \\ \int n^2 \\ \int n^3 \text{ la somme des } n \text{ premiers nombres naturels} \\ \cdots\cdots \\ \int n^{p+1} \end{array}\right.$$

Digitized by Google

élevés chacun à la puiſſance du degré

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \cdots\cdots \\ \overline{p+1} \end{array}\right. \text{; \& par conſéquent, par}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \int\left(\frac{n.\overline{n+1}}{1.2}\right)^1,\ \int\left(\frac{n.\overline{n+1}}{1.2}\right)^2,\ \int\left(\frac{n.\overline{n+1}}{1.2}\right)^3,\ \&c. \\ \int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}\right)^1,\ \int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}\right)^2,\ \int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}\right)^3,\ \&c. \\ \int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{1.2.3.4}\right)^1,\ \int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{1.2.3.4}\right)^2 \&c. \\ \&c. \end{array}\right.$$

la ſomme des n premiers nombres

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Triangulaires,} \\ \text{Pyramidaux, élevés chacun à la puiſſance} \\ \text{Cinquiemes,} \\ \&c. \end{array}\right.$$

1e, 2e, 3e, &c. Cela poſé :

1°. $\int n = \frac{n.\overline{n+1}}{1.2}$, (XXXIV & XXXV).

$$\int \frac{n.\overline{n+1}}{1.2} \text{ ou } \int \frac{n^2}{2} + \int \frac{n}{2} \text{ ou } \int \frac{n^2}{2} + \frac{n.\overline{n+1}}{1.2.2}$$

$$= \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}\text{; donc}$$

2°. $\int n^2 = -\frac{n.\overline{n+1}}{2} + \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{3}$;

$$\int \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3} \text{ ou } \int \frac{n^3}{6} + \int \frac{n^2}{2} + \int \frac{n}{3} \text{ ou}$$

Digitized by Google

$$\int \frac{n^3}{6} + \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{6} - \frac{n.\overline{n+1}}{4} + \frac{n.\overline{n+1}}{6} = \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\ ;\ \text{donc}$$

$$3^{o}.\ \int n^3 = \frac{n.\overline{n+1}}{2} - 3\,\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{3} + \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{4}.$$

On trouvera en procédant de même

$$4^{o}.\ \int n^4 = -\frac{n.\overline{n+1}}{2} + 7\,\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{3} - 6\,\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{4} + \frac{n.\overline{n+1}\ldots\overline{n+4}}{5},$$

ainſi de ſuite. Et faiſant pour abréger

$$a = \frac{n.\overline{n+1}}{2},$$

$$b = \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{3},$$

$$c = \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{4},$$

$$d = \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}.\overline{n+4}}{5},$$

ainſi de ſuite : on trouvera ſucceſſivement

$$\int n = +a,$$
$$\int n^2 = -a + b,$$
$$\int n^3 = +a - 3b + c,$$
$$\int n^4 = -a + 7b - 6c + d,$$
$$\int n^5 = +a - 15b + 25c - 10d + e\ ;$$

ainſi de ſuite : & en général

Digitized by Google

$$\int n^{p+1} = \pm\left\{a - \frac{2^p - 1}{1}\cdot b + \frac{3^p - 2\cdot 2^p + 1}{1\cdot 2}\,c - \frac{4^p - 3\cdot 3^p + 3\cdot 2^p - 1}{1.2.3}\cdot d + \frac{5^p - 4\cdot 4^p + 6\cdot 3^p - 4\cdot 2^p + 1}{1.2.3.4}\cdot e - \&c\right\}.$$

la loi de cette suite est visible, elle doit être précédée du signe + ou du signe −, selon que l'exposant p est pair ou impair; tous les termes postérieurs à celui dont le rang est marqué par $\overline{p+1}$ s'évanouissent.

On trouvera pareillement

$$\int \frac{n\cdot\overline{n+1}}{1.2} = \frac{b}{2};$$

$$\int \left(\frac{n\cdot\overline{n+1}}{1.2}\right)^2 = \frac{2b - 4c + d}{4};$$

$$\int \left(\frac{n\cdot\overline{n+1}}{1.2}\right)^3 = \frac{4b - 32c + 38d - 12e + f}{8}; \ldots\ldots$$

Et généralement $\int \left(\frac{n\cdot\overline{n+1}}{1.2}\right)^{p+1} =$

$$\frac{1}{1.2}\cdot\left\{b - \frac{3^p - 1}{1}\,c + \frac{6^p - 2\cdot 3^p + 1}{1.2}\cdot d - \frac{10^p - 3\cdot 6^p + 3\cdot 3^p - 1}{1.2.3}\,e + \frac{15^p - 4\cdot 10^p + 6\cdot 6^p - 4\cdot 3^p + 1}{1.2.3.4}\cdot f - \&c.\right\}$$

Suite dont la loi est visible, & dans laquelle tous les termes postérieurs au $\overline{2p+1}^{e}$ s'évanouissent.

On trouvera de même

$$\int \frac{n\cdot\overline{n+1}\cdot\overline{n+2}}{1.2.3} = +\frac{c}{6}$$

$$\int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}\right)^2 = -\frac{6c-18d+9e-f}{36} \ldots\ldots$$

Et généralement $\int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3}\right)^{p+1} =$

$$+\frac{1}{1.2.3}.\left\{c-\frac{4^p-1}{1}d+\frac{10^p-2.4^p+1}{1.2}.e-\frac{20^p-3.10^p+3.4^p-1}{1.2.3}f+\&c.\right\}$$

le signe + ou − selon que p est pair ou impair.

En continuant à procéder de même, & faisant pour abréger

$$m.\overline{m+1} = m^{I}$$
$$m.\overline{m+1}.\overline{m+2} = m^{II}$$
$$m.\overline{m+1}.\overline{m+2}.\overline{m+3} = m^{III}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \&c.$$
$$n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\ldots.\overline{n+m} = n^{V}$$
$$n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\ldots.\overline{n+m+1} = n^{VI}$$
$$n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\ldots.\overline{n+m+2} = n^{VII}$$
$$n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\ldots.\overline{n+m+3} = n^{IV}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \&c.$$

ainsi de suite :

On trouvera en général

$$\int\left(\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\ldots.\overline{n+m-2}}{1.2.3.\ldots.\overline{m-1}}\right)^{p+1} =$$

$$\pm\frac{1}{1.2.3.\ldots.\overline{m-1}} \times$$

$$\left\{1.\frac{n^{I}}{m}\right.$$

$$-\left(\frac{m^p}{1}-1\right).\frac{n^{II}}{1.\overline{m+1}}$$

Digitized by Google

$$+\left(\frac{m^{1\,P}}{1.2}-\frac{2\,m^{1P}}{1}+1\right)\cdot\frac{n^{111}}{1.2.\overline{m+2}.}$$

$$-\left(\frac{m^{11\,P}}{1.2.3}-\frac{3\,m^{1\,P}}{1.2}+\frac{3\,m^{P}}{1}-1\right)\cdot\frac{n^{1V}}{1.2.3.\overline{m+3}}$$

$$+\left(\frac{m^{111\,P}}{1.2.3.4}-\frac{4m^{11P}}{1.2.3}+\frac{6m^{1\,P}}{1.2}-\frac{4m^{P}}{1}+1\right)\cdot\frac{n^{V}}{1.2.3.4.\overline{m+4}}$$

$$-\text{ \&c. }\Big\}.$$

Le Signe — précédent dans le cas seulement où m est un nombre pair & p un nombre impair; il faut observer que tous les termes de cette suite, qui suivent celui du rang $\overline{m\,p-p+1}$, s'évanouissent.

On a donc l'expression générale en m, n, p de la somme des premiers nombres ordinaux de l'ordre m, pris au nombre n, & élevés chacun à la puissance du degré exprimé par $\overline{p+1}$; *C. Q. F. T.*

XXXVIII.

Avertissement. Pour éviter les formules trop compliquées, soit par le grand nombre des termes dont elles peuvent être composées, soit par le grand nombre des facteurs qui composent ces différents termes, soit même par le grand nombre des suites, lorsque ces formules sont formées de plusieurs suites différentes; nous omettrons & remplacerons par quelques points les facteurs, termes & suites dont la loi sera visible, & qui seront faciles à suppléer.

Par Ex. 1.2.3.4.....24
exprimera le produit de tous les nombres naturels depuis 1 jusqu'à 24. inclusivement.

80.81.....$\overline{80+m}$
exprimera le produit de tous les nombres naturels depuis 80 jusques à $\overline{80+m}$ inclusivement.

1 + 2 + 3 + ... + 25

marquera la ſomme des 25 premiers nombres naturels :

$$1 + 3 + 6 + \ldots\ldots + \frac{n.\overline{n+1}}{1.2}$$

la ſomme des n premiers triangulaires :

$$\begin{aligned}
&1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1\\
&+ 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n\\
&+ 1 + 3 + 6 + \ldots\ldots + \frac{n.\overline{n+1}}{1.2}\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ 1 + m + \frac{m.\overline{m+1}}{1.2} + \ldots + \frac{n.\overline{n+1}\ldots\overline{n+m-2}}{1.2\ldots\ldots\overline{m-1}}
\end{aligned}$$

la ſomme des n premiers nombres ordinaux des m premiers ordres ; ainſi des autres.

Sur quoi il faut obſerver que cette méthode a l'avantage de fixer d'une maniere générale & viſible le nombre des facteurs, termes & ſuites qui compoſent une quantité algébrique ; quoique ce nombre dépende de la valeur des lettres qui entrent dans la quantité, & varie au gré de cette valeur.

Digitized by Google

CHAPITRE II.

De la Probabilité des Hazards qui ont lieu dans le concours ſimultané de pluſieurs Chances.

§. XXXIX.

IL PEUT ſe faire que ſur le nombre total m des Chances dépendantes d'un acte, mouvement, ou état de choſes donné, il n'en doive arriver qu'une ſeule : il peut ſe faire auſſi qu'il doive arriver un certain nombre p de ces chances.

Dans le premier cas, ſi on diſtingue une partie de ces m chances; que le nombre des chances diſtinguées ſoit n, & qu'un hazard ſpécifié conſiſte dans l'arrivée d'une quelconque des chances diſtinguées : la probabilité du hazard ſpécifié eſt $\frac{n}{m}$.

Par Ex. Si ſur le nombre total des 32 cartes qui compoſent un jeu de Piquet, on en doit tirer une aveuglément & ſans choix, & qu'on deſire que la carte tirée ſoit un Tréfle : les cartes diſtinguées ſont les Tréfles qui ſont au nombre de 8 ; & la probabilité du hazard deſiré eſt $\frac{8}{32}$ ou $\frac{1}{4}$.

Dans le 2e. cas : ſi l'on diſtingue une partie du nombre total des chances, que le nombre des chances diſtinguées ſoit n, & qu'un hazard ſpécifié conſiſte dans l'arrivée d'un nombre r des chances diſtinguées : *Par ex.* Si ſur les 32 cartes d'un jeu de Piquet,

Digitized by Google

on en doit tirer 9 aveuglément, & qu'on deſire que dans les 9 cartes tirées il ſe trouve 5 Tréfles, ſans ſpécifier leſquels : alors la probabilité du hazard ſpécifié n'eſt plus $\frac{n}{m}$ ni $\frac{1}{4}$; l'objet de ce chapitre eſt de déterminer cette Probabilité.

X L.

THÉOREME I. Nommant m le nombre de chances dépendantes d'un acte, mouvement, ou état de choſes donné, je dis qu'un nombre p de ces chances peut arriver du nombre de manieres également poſſibles exprimé par $\frac{m.\overline{m-1}.....\overline{m-p+1}}{1.2.....p}$.

Démonſt. Repréſentant par $a, b, c, d, f,$ &c. au nombre m, les chances données :

Le nombre de manieres dont une ſeule de ces chances peut arriver, eſt m ou $\frac{m}{1}$ comme il eſt évid.

Le nombre des manieres dont deux des m chances données peuvent arriver, eſt celui des termes de la table ſuivante :

a b				
a c	*b c*			
a d	*b d*	*c d*		
a f	*b f*	*c f*	*d f*	
—	—	—	—	—

dans laquelle le nombre des lettres eſt m : or, il eſt viſible que le nombre de ces termes eſt $\frac{m.\overline{m-1}}{1.2}$.

Le nombre des manieres dont trois des m chances données peuvent arriver, eſt celui des termes de la table ſuivante :

Digitized by Google

a b c			
a b d	*a c d*		
a b f	*a c f*	*a d f*	
	b c d		
	b c f	*b d f*	
		c d f	

dans laquelle le nombre des lettres est m : or, il est visible que le nombre de ces termes est $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$.

Ainsi de suite : & continuant à procéder de même, on trouvera généralement que le nombe des manieres également possibles dont un nombre p des m chances données peut arriver à la fois, est $\frac{m.m-1....m-p+1}{1.2.....p}$ *C. Q. F. D.*

XLI.

Ex. Sur un jeu de Piquet de 32 cartes mêlées on en tire 15 aveuglément & sans choix, & l'on demande de combien de manieres également possibles la somme des cartes tirées peut se trouver composée. Pour le trouver : dans l'expression générale $\frac{m.....m-p+1}{1.2.....p}$; je substitue 32 à m, 15 à p, & elle devient $\frac{32....18}{1.2.....15} = 565722720$ qui est le nombre cherché.

XLII.

Remarq. I. Si l'on demandoit de combien de manieres on peut partager les m chances en deux parts, dont l'une contiendroit un nombre p de ces chances, & l'autre les $m-p$ chances restantes ; la solution seroit la même, comme il est évident : c'est-à-dire, que le nombre de manieres cherché, seroit $\frac{m.....m-p+1}{1.2.....p}$ ou $\frac{m.....p+1}{1.2.....m-p}$:

Digitized by Google

Ainſi, ſi l'on demande de combien de manieres on peut des 32 cartes du Piquet faire deux parts, l'une de 27 cartes, l'autre de 5, on trouvera pour le nombre cherché $\frac{32.....28}{1.2.3.4.5}$ ou $\frac{32.....6}{1.2.....27} = 201376$

XLIII.

NOMMANT toujours m le nombre total des chances; ſi un nombre p de ces chances doit arriver à la fois; puis un nombre p' des $m-p$ chances qui reſtent, arriver enſuite à la fois; je dis que cet effet peut avoir lieu du nombre de manieres exprimé par

$$\frac{m.....\overline{m-p+1}}{1.2.....p} \cdot \frac{\overline{m-p.....m-p-p'+1}}{1.2.....p'}.$$

Car le nombre des manieres dont les p chances qui doivent d'abord arriver, peuvent arriver, eſt $\frac{m.....\overline{m-p+1}}{1.2.....p}$; mais à chacune de ces manieres, les p' chances qui doivent enſuite arriver peuvent arriver de $\frac{\overline{m-p}...\overline{m-p-p'+1}}{1.2.....p'}$ manieres; donc le nombre de manieres dont l'effet duquel il s'agit peut avoir lieu, eſt le produit de $\frac{m.....\overline{m-p+1}}{1.2.....p}$ par $\frac{\overline{m-p}....\overline{m-p-p'+1}}{1.2.....p'}$

Par ex. Si l'on demande de combien de manieres ſur un jeu de Piquet je puis prendre 12 cartes, & enſuite ſur les 20 cartes reſtantes en prendre 8: je ſubſtitue dans la formule ci-deſſus 32 à m; 12 à p; 8 à p'; & elle devient $\frac{32.....21}{1.2.....12} \cdot \frac{20.....13}{1.2.....8}$ $= 28443124004800$ qui eſt le nombre cherché.

Digitized by Google

XLIV.

En continuant à procéder de même, on trouvera que m étant le nombre total des chances, si un nombre p de ces chances doit d'abord arriver; puis un nombre p' des $m-p$ chances qui restent; puis un nombre p'' d'entre les $m-p-p'$ chances qui restent; puis un nombre p''' d'entre les $m-p-p'-p''$ chances qui restent, ainsi de suite; le nombre de manieres également possibles dont cet effet peut avoir lieu, est $\frac{m \ldots\ldots \overline{m-p+1}}{1.2\ldots\ldots p} \cdot \frac{\overline{m-p} \ldots\ldots \overline{m-p-p'+1}}{1.2\ldots\ldots p'} \times$

$\frac{\overline{m-p-p'} \ldots\ldots \overline{m-p-p'-p''+1}}{1.2\ldots\ldots p''} \times \ldots\ldots\ldots$

XLV.

Remarq. 2e. Si l'on demandoit de combien de manieres on peut partager les m chances en plusieurs parts; la premiere contenant un nombre p, la 2.e un nombre p', la 3.e un nombre p'', &c. de ces chances; on trouveroit la formule ci-dessus pour le nombre cherché.

Par ex. Si l'on demande de combien de manieres les 32 cartes du Piquet peuvent être distribuées entre les 2 joueurs & le talon; ou ce qui est de même, partagées en 3 parts deux de 12, & l'autre de 8 cartes: on aura pour le nombre cherché

$\frac{32 \ldots 21}{1.2 \ldots 12} \cdot \frac{20 \ldots 13}{1 \ldots 8} = 284431240004800.$

Si l'on demande de combien de manieres les 52 cartes du jeu complet peuvent être partagées entre les 4 joueurs au Wisk, ou ce qui est de même, distribuées en 4 parts, chacune de 13 cartes:

Dans la formule ci-dessus je substitue 52 à m, 13 à p, p' & p'', & elle devient $\frac{52 \ldots\ldots 40}{1.2\ldots\ldots 13} \times$

$\frac{39.....27}{1.2.....13} \cdot \frac{26.....14}{1.2.....13} = 85651261978511517978614400000.$
qui eſt le nombre cherché.

XLVI.

THÉOREME II. Nommant m le nombre des chances dont un hazard ſpécifié ſeroit partie s'il ne devoit arriver qu'une ſeule de ces chances : & ſuppoſant

1°. Qu'un nombre p de ces chances doit certainement arriver :

2°. Que dans le nombre total des chances, on en diſtingue une partie, & que le nombre des chances diſtinguées ſoit n :

3°. Que le hazard ſpécifié conſiſte dans l'arrivée d'un nombre r juſte d'entre les chances diſtinguées :

Je dis que la Probabilité du hazard ſpécifié, eſt

$$\frac{\overline{n.....n-r+1}}{1.2.....r} \cdot \frac{\overline{m-n.....m-p-n+r+1}}{1.2.....\overline{p-r}} \cdot \frac{\overline{m...m-p+1}}{1.2.....p}.$$

DEMONST. 1.° Sur le nombre n des chances diſtinguées, il en peut arriver un nombre r du nombre de manieres exprimé par $\frac{\overline{n.....n-r+1}}{1.2.....r}$, (*XL.*) : mais à chacune de ces manieres, ſur le nombre $m-n$ des chances non diſtinguées, il en peut arriver un nombre $p-r$ de $\frac{\overline{m-n.....m-n-p+r+1}}{1.2.....\overline{p-r}}$ manieres : donc le nombre des manieres également poſſibles d'avoir le hazard ſpécifié, ou ce qui eſt de même, le nombre des chances qui donnent ce hazard dans la préſente hypotheſe, eſt

$$\frac{\overline{n.....n-r+1}}{1.2.....r} \cdot \frac{\overline{m-n.....m-n-p+r+1}}{1.2.....\overline{p-r}}$$

2.° Sur la totalité des m chances ſuppoſées, il

peut en arriver un nombre p du nombre de manieres exprimé par $\frac{m \ldots . \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots . p}$; donc ce nombre eſt celui de tous les cas poſſibles, c'eſt-à-dire, le nombre total des chances dans la préſente hypotheſe :

Donc la Probabilité cherchée eſt (X.)

$$\frac{n \ldots \overline{n-r+1}}{1.2 \ldots . r} \cdot \frac{\overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+r+1}}{1.2 \ldots . \overline{p-r}} \cdot \frac{m \ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots . p}$$

C. Q. F. D.

XLVII.

Exemp. Si ſur un jeu de Piquet on doit tirer aveuglément 9 cartes, & qu'on deſire que dans les 9 cartes tirées il ſe trouve 5 piques juſte, c. à. d. ni plus ni moins ; pour avoir la probabilité du hazard deſiré, dans la formule générale ci-deſſus, je fais $m = 32$; $n = 8$; $p = 9$; $5 = r$; & elle devient

$$\frac{8 \ldots . 4}{1.2 \ldots . 5} \cdot \frac{24 \ldots . 21}{1.2 \ldots . 4} \cdot \frac{32 \ldots . 24}{1.2 \ldots . 9} = \frac{12397}{584350} .$$

XLVIII.

Si dans l'expreſſion générale

$$\frac{n \ldots . \overline{n-r+1}}{1.2 \ldots . r} \cdot \frac{\overline{m-n} \ldots \overline{m-n-p+r+1}}{1.2 \ldots . \overline{p-r}} \cdot \frac{m \ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots . p} ,$$

on fait $r = o$, elle devient

$$\frac{\overline{m-n} \ldots . \overline{m-n-p+1}}{1.2 \ldots . p} \cdot \frac{m \ldots . \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots . p}$$

qui eſt la probabilité qu'il n'arrivera aucune des n chances diſtinguées.

XLIX.

Si on retranche cette derniere expreſſion de l'unité, on aura

1-

$1 - \frac{\overline{m-n}.....\overline{m-n-p+1}}{1.2.....p} \cdot \frac{m.....\overline{m-p+1}}{1.2.....p}$ pour la probabilité qu'il arrivera au moins une des chances distinguées : (XIV.)

L.

Exemp. Si sur les 90 Numéros de la Lotterie Royale de France j'en prends 75, la probabilité que dans le tirage prochain il n'arrivera aucun des 75 numéros que j'ai pris se trouvera en substituant dans la formule $\frac{\overline{m-n}.....\overline{m-n-p+1}}{1.2.....p} \cdot \frac{m....\overline{m-p+1}}{1.2.....p}$ 90 à m, 75 à n, & 5 à p; & elle deviendra $\frac{15...11}{1.2...5} \cdot \frac{90.....86}{1.2.....5} = \frac{1001}{14649756}$; qui est la probabilité cherchée; Et $1 - \frac{1001}{14649756}$ ou $\frac{14648755}{14649756}$ sera la probabilité que dans le tirage prochain il arrivera au moins un des 75 Numéros que j'ai pris.

L I.

Si dans l'expression générale on fait $r=n$; elle devient $\frac{\overline{m-r}.....\overline{m-p+1}}{1.2.....p-r} \cdot \frac{m.....\overline{m-p+1}}{1.2.....p}$ qui est la probabilité que toutes les chances distinguées arriveront :

Par ex. Si je prends 3 numéros de la Lotterie Royale de France; pour avoir la probabilité que ces 3 numéros arriveront au prochain tirage, dans la formule ci-dessus je substitue 90 à m, 5 à p, 3 à r, & elle devient $\frac{87.86}{1.2} \cdot \frac{90.....86}{1.2.....5} = \frac{1}{11748}$. qui est la probabilité cherchée.

Digitized by Google

LII.

Si $n = p$, la formule générale devient $\frac{p \ldots \overline{p-r+1}}{1.2 \ldots\ldots r} \cdot \frac{\overline{m-p} \ldots \overline{m-2p+r+1}}{1.2 \ldots\ldots\ldots p=r} : \frac{m \ldots\ldots\ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots\ldots p}$.

LIII.

Si $r = p = n$; la formule générale devient $1 : \frac{m \ldots\ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots\ldots p}$ ou $\frac{1.2 \ldots\ldots p}{m \ldots\ldots m-p+1}$;

Par ex. Si je prends 5 des 90 numéros de la Lotterie Royale de France : pour avoir la probabilité que mes 5 numéros arriveront au tirage prochain ; dans l'expreſſion ci-deſſus je fais $90 = m$, $5 = p$, & elle devient $\frac{1.2 \ldots\ldots\ldots 5}{90 \ldots\ldots\ldots 86} = \frac{1}{43949268}$.

LIV.

Si $p = r = 1$. La formule générale ſe réduit à $\frac{n}{m}$; ce qui eſt le cas où une ſeule des chances diſtinguées doit arriver.

LV.

PROBLÊME Ier. Nommant m le nombre des chances dont un hazard ſpécifié feroit partie s'il ne devoit arriver qu'une ſeule de ces chances : & ſuppoſant 1°. Qu'un nombre p de ces chances doit certainement arriver. 2°. Que dans le nombre total des chances on en diſtingue une partie, & que le nombre des chances diſtinguées eſt n. 3°. Que le hazard ſpécifié conſiſte dans l'arrivée d'un nombre r au moins d'entre les n chances diſtinguées ;

Digitized by Google

Trouver la Probabilité du hazard ſpécifié.

SOLUT. 1°. Pour avoir le numérateur de la Probabilité cherchée ; j'obſerve qu'il eſt compoſé de tous les produits particuliers ci-après énoncés, ſavoir ; le nombre de toutes les manieres également poſſibles de l'arrivée du nombre juſte

$$\left\{\begin{array}{l} r \\ r+1 \\ r+2 \\ r+3 \\ \ldots\ldots \\ n-1 \\ n \end{array}\right.$$ d'entre les n chances diſtinguées ; *c. à. d.* de

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{n \ldots\ldots \overline{n-r+1}}{1.2 \ldots\ldots r} \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p-n+r+1}}{1.2 \ldots\ldots \overline{p-r}}, \\ \dfrac{n \ldots\ldots \overline{n-r}}{1.2 \ldots\ldots \overline{r+1}} \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p-n+r+2}}{1.2 \ldots\ldots \overline{p-r-1}}, \\ \dfrac{n \ldots\ldots \overline{n-r-1}}{1.2 \ldots\ldots \overline{r+2}} \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p-n+r+3}}{1.2 \ldots\ldots \overline{p-r-2}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p}}{1.2 \ldots\ldots \overline{p-n-1}}, \\ 1 \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots \overline{p-n}}, \end{array}\right.$$

ou ce qui eſt de même : le numérateur de la probabilité cherchée eſt la ſuite compoſée de la ſomme de tous ces produits.

2°. Le Dénominateur de la Probabilité cherchée eſt, comme ci-deſſus, (XLVI.) $\dfrac{m \ldots\ldots \overline{m-p+1}}{1.2 \ldots\ldots p}$;

Digitized by Google

donc la probabilité cherchée eſt

$$\left\{\begin{array}{r} 1 \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p+1}}{1.2\ldots.\overline{p-n}} + \\ n \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p}}{1.2\ldots.\overline{p-n+1}} + \\ \dfrac{n \cdot \overline{n-1}}{1.2} \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p-1}}{1.2\ldots.\overline{p-n+2}} + \\ \dfrac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2}}{1.2.3} \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots\ldots \overline{m-p-2}}{1.2\ldots.\overline{p-n+3}} + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ \dfrac{n \ldots. \overline{n-r}}{1.2.\ldots\overline{r+1}} \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots. \overline{m-p-n+r+2}}{1.2\ldots\ldots\overline{p-r-1}} + \\ \dfrac{n \ldots. \overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r} \cdot \dfrac{\overline{m-n} \ldots. \overline{m-p-n+r+1}}{1.2\ldots\ldots\overline{p-r}} \end{array}\right\} \cdot \frac{m \ldots. \overline{m-p+1}}{1.2\ldots.p}$$

C. Q. F. T.

LVI.

EXEMPLE. I. Je ſuppoſe qu'on tire aveuglément & ſans choix 10 cartes ſur un jeu de Piquet de 32 cartes : je deſire que dans les 10 cartes tirées, il ſe trouve au moins 5 cœurs : pour avoir la probabilité du hazard deſiré ; dans l'expreſſion générale ci-deſſus, je fais $m = 32$, $p = 10$, $n = 8$, $5 = r$, & elle devient

$$\left\{\begin{array}{r} 1 \cdot \dfrac{24.23}{1.2} + \\ \dfrac{8.}{1} \cdot \dfrac{24.23.22}{1.2.3} + \\ \dfrac{8.7}{1.2} \cdot \dfrac{24.23.22.21}{1.2.3.4} + \\ \dfrac{8.7.6}{1.2.3} \cdot \dfrac{24\ldots\ldots 20}{1.2.3.4.5} \end{array}\right\} \cdot \frac{32\ldots\ldots 23}{1.2\ldots\ldots 10} = \frac{5857}{140244}$$

qui eſt la probabilité cherchée.

Digitized by Google

LVII.

EXEMPLE II. Sur les 90 Numéros de la Lotterie Royale de France, on en choisit 75 : je desire que dans le tirage prochain il arrive au moins 3 des numéros choisis : pour avoir la probabilité du hazard desiré ; dans l'expression générale ci-dessus je fais $m=90$, $p=5$, $n=75$, $r=3$, & elle devient

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{75.....71}{1.2.3.4.5}\cdot 1 \;+\;\cdot\\ \frac{75.....72}{1.2.3.4}\cdot 15 \;+\\ \frac{75.74.73}{1.2.3}\cdot\frac{15.14}{1.2}\end{array}\right\}\cdot\frac{90.....86}{1.2.3.4.5}=\frac{14193755}{14049756}$$

qui est la probabilité cherchée.

LVIII.

PROBLÊME II. Nommant toujours m le nombre total des chances dont un hazard spécifié feroit partie s'il n'en devoit arriver qu'une seule : & supposant 1°. Qu'un nombre p de ces chances doit arriver certainement : 2°. Que dans ce nombre total des chances on en distingue une partie ; & que le nombre des chances distinguées est n ; 3°. Que le hazard spécifié consiste dans l'arrivée d'un nombre r au plus d'entre les n chances distinguées :

Trouver la Probabilité du hazard spécifié.

SOLUT. 1°. Pour avoir le numérateur de la Probabilité cherchée, j'observe qu'il est composé de tous les produits particuliers ci-après énoncés, savoir :

Le nombre de toutes les manieres également possibles de l'arrivée du nombre juste

$$\left\{\begin{array}{l}r\\ r-1\\ r-2\\ \ldots\ldots\\ 1\\ 0\end{array}\right.$$ d'entre les n chances distinguées ; *c. à. d.*

Digitized by Google

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{n\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}\cdot\dfrac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+1}}{1.2\ldots\ldots p-r},\\[2ex]
\dfrac{n\ldots\overline{n-r+2}}{1.2\ldots\ldots r-1}\cdot\dfrac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r}}{1.2\ldots p-r+1},\\[2ex]
\dfrac{n\ldots\overline{n-r+3}}{1.2\ldots\ldots r-2}\cdot\dfrac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r-1}}{1.2\ldots\ldots p-r+2},\\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\[2ex]
n\cdot\dfrac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+2}}{1.2\ldots\ldots p-1},\\[2ex]
1\cdot\dfrac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+1}}{1.2\ldots\ldots p},
\end{array}\right.$$

ou ce qui eſt de même : le numérateur de la probabilité cherchée eſt la ſuite compoſée de la ſomme de tous ces produits.

2.° Le Dénominateur de la probabilité cherchée eſt comme ci-deſſus $\frac{m\ldots\overline{m-p+1}}{1.2\ldots p}$ (XLVI.) : donc la Probabilité cherchée eſt

$$\left\{\begin{array}{ll}
1\cdot\dfrac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+1}}{1.2\ldots p} & +\\[2ex]
n\cdot\dfrac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+2}}{1.2\ldots p-1} & +\\[2ex]
\dfrac{n.\overline{n-1}}{1.2}\cdot\dfrac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+3}}{1.2\ldots p-2} & +\\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & +\\[2ex]
\dfrac{n\ldots\overline{n-r+2}}{1.2\ldots\ldots r-1}\cdot\dfrac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r}}{1.2\ldots p-r+1} & +\\[2ex]
\dfrac{n\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}\cdot\dfrac{\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+1}}{1.2\ldots p-r} & \Big\}\cdot\dfrac{m\ldots\overline{m-r+1}}{1.2\ldots p}
\end{array}\right.$$

C. Q. F. T.

LIX.

EXEMPLE I. Je ſuppoſe qu'on tire au euglément

& ſans choix 10 cartes ſur un jeu de Piquet de 32 cartes : je deſire que dans les 10 cartes tirées, il ne ſe trouve que 4 cœurs au plus :

Pour avoir la probabilité du hazard deſiré ; dans l'expreſſion générale ci-deſſus, je fais $m = 32$, $p = 10$, $n = 8$, $r = 4$, & elle devient

$$\left(1 \cdot \frac{24.....15}{1.2.....10} + 8 \cdot \frac{24.....16}{1.2.....9} + \frac{8.7}{1.2} \cdot \frac{24.....17}{1.2.....8} + \frac{8.7.6}{1.2.3} \cdot \frac{24.....18}{1.2.....7} + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \cdot \frac{24.....19}{1.2.....6}\right) : \frac{32.....23}{1.2.....10} = \frac{134387}{140244}$$

qui eſt la Probabilité cherchée.

L X.

EXEMPLE II. Sur les 90 numéros de la Lotterie Royale de France, on en choiſit 75 ; je deſire que dans le tirage prochain il n'arrive que 2 au plus des numéros choiſis ; pour avoir la probabilité du hazard deſiré, dans l'expreſſion générale ci-deſſus, je fais $m = 90$, $p = 5$, $n = 75$, $r = 2$, & elle devient

$$\left(1 \cdot \frac{15.....11}{1.2.3.4.5} + 75 \cdot \frac{15.....12}{1.2.3.4} + \frac{75.74}{1.2} \cdot \frac{15.14.13}{1.2.3}\right) : \frac{90.....86}{1.2.3.4.5} = \frac{456001}{14649756},$$

qui eſt la Probabilité cherchée.

Digitized by Google

CHAPITRE III.

De la Probabilité des Hazards qui dérivent du concours ſucceſſif de pluſieurs Chances dans un ordre déterminé.

§. LXI.

NOUS ſuppoſerons encore dans ce chapitre, que, ſur le nombre total *m* des chances dépendantes d'un acte, mouvement ou état de choſes donné, il en doive arriver ſucceſſivement & une à une un nombre *p*; que, dans ce nombre total des chances on en diſtingue une partie; & que le nombre des chances diſtinguées eſt *n*.

Mais il peut arriver deux cas différents :

Ou bien le hazard ſpécifié dépend de l'arrivée d'un nombre *r* d'entre les chances diſtinguées, quelque ſoit l'ordre dans lequel elles arrivent : nous avons, dans le chapitre précédent, déterminé d'une maniere générale la probabilité du hazard ſpécifié dans cette hypotheſe.

En ſecond lieu : il peut ſe faire que le hazard ſpécifié conſiſte en l'arrivée d'un nombre *r* d'entre les chances diſtinguées dans un ordre déterminé.

Par ex. Si ſur les 32 cartes du Piquet on en nomme 4 dans un ordre déterminé, tel que celui-ci

As de Pique 3e, Roi de Tréfle 5e, Dame de Cœur 7e, Valet de Carreau 10e.

Digitized by Google

Si enſuite on tire aveuglément 10 des 32 cartes données ; ſucceſſivement une à une ; & qu'on deſire que dans les 10 cartes tirées, il s'en trouve au moins 2 de celles qu'on a nommées, dans la place qu'on leur a aſſignée : c'eſt-à-dire,

L'As de Pique la 3e, & le Roi de Tréfle la 5e ; ou bien

L'As de Pique la 3e, & la Dame de Cœur la 7e ; ou bien

L'As de Pique la 3e, & le Valet de Carreau la 10e ; ou bien

Le Roi de Tréfle la 5e, & la Dame de Cœur la 7e ; ou bien

Le Roi de Tréfle la 5e, & le Valet de Carreau la 10e ; ou bien

La Dame de Cœur la 7e, & le Valet de Carreau la 10e.

Il s'agit de trouver dans ces ſortes d'hypotheſes la probabilité du hazard deſiré, ce qui ſera la matiere de ce troiſieme Chapitre.

LXII.

THÉORÊME. Nommant m le nombre des chances dépendantes d'un acte, mouvement, ou état de choſes donné ; je dis qu'un nombre p de ces chances peut arriver ſucceſſivement une à une du nombre de manieres également poſſibles exprimé par $m \cdot \overline{m-1} \ldots\ldots \overline{m-p+1}$

DÉM. Repréſentant les chances données par a, b, c, d, f, &c. au nombre m ; il eſt évident que les manieres également poſſibles dont une ſeule de ces chances peut arriver, ſont repréſentées toutes par les termes de table ſuivante

$a \quad b \quad c \quad d \quad f \quad -$

dont le nombre eſt m.

Digitized by Google

Le nombre des manieres dont deux des chances données peuvent arriver, eſt celui des termes de la table ſuivante,

a b	*b a*	*c a*	*d a*	*f a*	—
a c	*b c*	*c b*	*d b*	*f b*	—
a d	*b d*	*c d*	*d c*	*f c*	—
a f	*b f*	*c f*	*d f*	*f d*	—
—	—	—	—	—	—

dans laquelle le nombre des lettres eſt m, & où il eſt viſible que le nombre des termes eſt $m \cdot \overline{m-1}$.

Le nombre des manieres également poſſibles, dont trois des m chances données peuvent arriver, eſt celui des termes de la Table ſuivante,

a b c	*b a c*	*c a b*	*d a b*	*f a b*	——
a b d	*b a d*	*c a d*	*d a c*	*f a c*	——
a b f	*b a f*	*c a f*	*d a f*	*f a d*	——
a c b	*b c a*	*c b a*	*d b a*	*f b a*	——
a c d	*b c d*	*c b d*	*d b c*	*f b c*	——
a c f	*b c f*	*c b f*	*d b f*	*f b d*	——
a d b	*b d a*	*c d a*	*d c a*	*f c a*	——
a d c	*b d c*	*c d b*	*d c b*	*f c b*	——
a d f	*b d f*	*c d f*	*d c f*	*f c d*	——
a f b	*b f a*	*c f a*	*d f a*	*f d a*	——
a f c	*b f c*	*c f b*	*d f b*	*f d b*	——
a f d	*b f d*	*c f d*	*d f c*	*f d c*	——
——	——	——	——	——	——
——	——	——	——	——	——
——	——	——	——	——	——
——	——	——	——	——	——

dans laquelle le nombre des lettres eſt m, & où il

eſt viſible que le nombre des termes eſt

$$m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}$$

Ainſi de ſuite : & continuant à procéder de même, on trouvera généralement que le nombre des manieres également poſſibles, dont un nombre p des m chances données peut arriver ſucceſſivement une à une, eſt $m \cdot \overline{m-1} \ldots\ldots \overline{m-p+1}$; *C. Q. F. D.*

LXIII.

EXEMPLE. Sur les 90 numéros de la Lotterie Royale de France, on doit au tirage prochain en tirer 5 ſucceſſivement une à une : pour ſavoir de combien de manieres la choſe peut ſe faire, ou ce qui eſt de même, combien il y a de quines déterminés également poſſibles ; dans l'expreſſion $m \ldots\ldots \overline{m-p+1}$ je ſubſtitue 90 à m, 5 à p ; & elle devient $90 \ldots\ldots 86 = 5273912160$. qui eſt le nombre cherché.

LXIV.

COR. Si $p = m$, l'expreſſion générale $m \ldots \overline{m-p+1}$ deviendra $1 . 2 . 3 \ldots\ldots m$, qui eſt le produit de tous les nombres naturels depuis 1 juſqu'à m incluſivement, c'eſt-à-dire que les m chances peuvent venir ſucceſſivement une à une de $1 . 2 \ldots\ldots m$, manieres ; ainſi les 24 lettres de l'alphabet peuvent être toutes nommées ſucceſſivement chacune une fois, ou être alignées l'une à la ſuite de l'autre du nombre de manieres $1.2 \ldots\ldots 24 = 56935745956152999936000$.

LXV.

PROBLÊME I. Sur le nombre total m des chances dépendantes d'un acte, mouvement, ou état de choſes donné, j'en diſtingue une partie, & repréſente par n le nombre des chances diſtinguées : Je nomme ſucceſſivement une à une les chances diſ-

Digitized by Google

tinguées dans un ordre déterminé : par exemple, la chance a la premiere, b la 2e, c la 3e, &c ; il doit arriver ſucceſſivement une à une un nombre p d'entre les m chances données : on demande de combien de manieres également poſſibles il peut arriver

$$\left\{\begin{array}{l} \text{o} \\ \text{une} \\ \text{deux} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \text{le nombre } r \end{array}\right\} \text{juſte : d'entre les chances}$$

nommées, ſans qu'aucune de ces chances arrive à la place où elle a été nommée.

SOLUT. 1°. Aucune des chances nommées n'arrivant, les $m-n$ chances qui n'ont pas été nommées peuvent occuper les p places ſuppoſées du nombre de manieres exprimé par $\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+1}$; (LXII.) donc le nombre de manieres également poſſibles dont il peut n'arriver aucune des chances nommées eſt $\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+1}$ ou 1. (1). $\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+1}$

2°. La chance a peut occuper une des p places ſuppoſées d'un nombre p de manieres également poſſibles repréſentées par les termes de la table ſuivante

$$\begin{array}{ccccc} a & * & * & * & * \\ * & a & * & * & * \\ * & * & a & * & * \\ * & * & * & a & * \\ * & * & * & * & a \end{array}$$

dans laquelle on ſuppoſe que p le nombre des places eſt 5, où on repréſente par * les places occupées par des chances qui n'ont point été nommées, & dans laquelle il eſt viſible que ſi on eut fait le nombre des places tout autre que 5, celui des termes auroit toujours été p.

Mais pour avoir le nombre de manieres dont a

Digitized by Google

peut arriver ailleurs qu'à sa place, il faut, du nombre des termes de la table ci-dessus, retrancher celui où a se trouve à sa place : donc la chance a peut arriver ailleurs qu'à sa place, du nombre de manieres exprimé par $p-1$.

Ce qui vient d'être dit de la chance a peut s'appliquer à chacune des autres chances nommées b, c, d, &c. qui sont au nombre de n; d'où l'on voit que le nombre de manieres dont une seule des chances nommées peut arriver sans que ce soit à sa place, est $n.\overline{p-1}$.

Mais à chacune de ces manieres, un nombre $p-1$ d'entre les $m-n$ chances qui n'ont pas été nommées, peuvent arriver dans les $p-1$ places restantes du nombre de manieres exprimé par $\overline{m-n.....m-n-p+2}$: (LXII.)

Donc dans l'hypothese présente, le nombre de manieres également possibles dont une seule des chances nommées peut arriver ailleurs qu'à sa place, est $n.\overline{p-1}.\overline{m-n.....m-n-p+2}$ ou $\frac{n}{1}.\binom{1.p}{-1}.\overline{m-n.....m-n-p+2}$.

3°. La chance a & la chance b peuvent occuper deux d'entre les p places données, de $p.\overline{p-1}$ manieres représentées par les termes de la table suivante

a	b	*	*	*	b	a	*	*	*
a	*	b	*	*	b	*	a	*	*
a	*	*	b	*	b	*	*	a	*
a	*	*	*	b	b	*	*	*	a
*	a	b	*	*	*	b	a	*	*
*	a	*	b	*	*	b	*	a	*
*	a	*	*	b	*	b	*	*	a
*	*	a	b	*	*	*	b	a	*
*	*	a	*	b	*	*	b	*	a
*	*	*	a	b	*	*	*	b	a

desquels il faut retrancher ceux où a occupe la 1re.

Digitized by Google

place, & ceux où b occupe la 2e. place, lesquels sont au nombre de $2\overline{p-1}$; moins celui où a étant à la 1e. place, b est à la 2e.

Ainsi les deux chances a & b peuvent arriver sans que ce soit à leurs places du nombre de manieres $p.\overline{p-1}-2.\overline{p-1}+1$.

Ce qui vient d'être dit des chances a & b peut s'appliquer également aux chances

$$\left\{\begin{array}{llll} a \& b, & & & \\ a \& c, & b \& c & & \\ a \& d, & b \& d & c \& d & \\ \hline & \overline{\qquad} & \overline{\qquad} & \overline{\qquad} \end{array}\right.$$

au nombre $\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}$; d'où l'on voit que 2 des chances nommées peuvent arriver seules sans que ce soit à leurs places de $\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\left\{\begin{array}{l} 1.p.\overline{p-1} \\ -2.\overline{p-1} \\ +1 \end{array}\right\}$ manieres.

Mais à chacune de ces manieres : $\overline{p-2}$ d'entre les chances qui n'ont pas été nommées, peuvent occuper les $\overline{p-2}$ places restantes de $\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+3}$ manieres :

Donc le nombre des manieres également possibles, dont deux seulement d'entre les chances nommées peuvent arriver ailleurs qu'à leurs places, est

$$\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.\left\{\begin{array}{l} 1.p.\overline{p-1} \\ -2.\overline{p-1} \\ +1 \end{array}\right\}.\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+3}.$$

4°. En continuant de procéder de même, on trouvera successivement que le nombre des manieres également possibles dont 3, 4, &c. seulement des chances nommées peuvent arriver, sans qu'aucune arrive à sa place, est

$$\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3}.\left\{\begin{array}{l} 1.\overline{p-2}.\overline{p-1}.p \\ -3.\overline{p-2}.\overline{p-1} \\ +3.\overline{p-2} \\ -1 \end{array}\right\}.\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+4};$$

Digitized by Google

$$\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\cdot\left\{\begin{array}{l}1.\overline{p-3.p-2.p-1}.p\\-4.p-3.p-2.p-1\\+6.p-3.p-2\\-4.p-3\\+1\end{array}\right\}.\overline{m-n...m-p-n+5};$$

&c.

D'où l'on voit qu'en général, dans la préſente hypotheſe, le nombre des manieres également poſſibles dont il peut arriver un nombre r juſte des n chances nommées ſans qu'une ſeule arrive à la place où elle a été nommée, eſt

$$\frac{n.....\overline{n-r+1}}{1.2.....r}\cdot\left\{\begin{array}{l}1.\overline{p-r+1}....p\\-r.\overline{p-r+1}....p-1\\+\frac{r.r-1}{1.2}.\overline{p-r+1}...\overline{p-2}\\+.....\\+1\end{array}\right\}.\overline{m-n...m-n-p+r+1}$$

C. Q. F. T.

LXVI.

EXEMP. Sur 10 cartes différentes poſées ſur une table, j'en diſtingue 6 que je nomme par ordre une à une: ſur les dix cartes données, on en tire 8 aveuglément & ſans choix, mais une à une & ſucceſſivement: il s'agit de ſavoir, de combien de manieres également poſſibles, dans les 8 cartes tirées il peut s'en trouver 4 ni plus ni moins de celles que j'ai nommées, ſans qu'une ſeule ſe trouve à la place où elle a été nommée.

Pour y parvenir: dans la formule générale qui vient d'être trouvée, je ſubſtitue 10 à m, 6 à n, 8 à p, 4 à r, & elle devient

$$\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\cdot\left\{\begin{array}{l}1.5.6.7.8\\-4.5.6.7\\+6.5.6\\-4.5\\+1\end{array}\right\}.4.3.2.1=360360$$

qui eſt le nombre cherché.

Digitized by Google

LXVII.

COROLL. Si ſur les m chances dépendantes d'un état de choſes donné, on en nomme n une à une, aſſignant à chacune une certaine place, & s'il doit arriver ſucceſſivement une à une un nombre p de ces chances données, la probabilité qu'il arrivera un nombre r juſte d'entre les n chances nommées ſans qu'une ſeule arrive à la place qui lui a été aſſignée, eſt

$$\frac{n\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}\left\{\begin{array}{l} 1\ldots\overline{p-r+1}\ldots\ldots p \\ -r\ldots p-r+1\ldots\ldots p-1 \\ +\frac{r.r-1}{1.2}\ldots\overline{p-r+1}\ldots p-2 \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +1 \end{array}\right\}\ldots\frac{m-n\ldots\overline{m-n-p+r+1}}{m\ldots\ldots\ldots\overline{m-p+1}};$$

car le numérateur de cette probabilité eſt évidemment la formule générale trouvée au problême 1er. ci-deſſus, & le dénominateur eſt $m\ldots\overline{m-p+1}$ (LXII.)

LXVIII.

EXEMPLE. Si ſur 10 cartes données on en nomme 6 une à une, aſſignant à chacune une place déterminée, & qu'on tire ſans choix une à une 8 de ces cartes : la probabilité que dans les 8 cartes tirées, il s'en trouvera 4 juſte des nommées, ſans qu'une ſeule ſoit tirée à la place qui lui a été aſſignée, eſt $\frac{360360}{1814400} = \frac{1001}{5010}$.

LXIX.

Si $n = p$; La formule générale devient

$$\frac{n\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots r}\left\{\begin{array}{l} 1\ldots\overline{n-r+1}\ldots n \\ -r\ldots\overline{n-r+1}\ldots\overline{n-1} \\ +\frac{r.r-1}{1.2}\ldots\overline{n-r+1}\ldots\overline{n-2} \\ -+\ldots\ldots\ldots \\ +1 \end{array}\right\}\ldots\frac{m-n\ldots\overline{m-2n+r+1}}{m\ldots\ldots\overline{m-n+1}};$$

ainſi :

ainſi, ſur 10 cartes différentes données, ſi on en nomme 8 une à une, aſſignant à chacune une place déterminée, & qu'on tire ſans choix une à une 8 des cartes données : la probabilité que dans les 8 cartes tirées il s'en trouvera 6 juſte des nommées ſans qu'une ſeule arrive à la place qui lui a été aſſignée, eſt

$$\frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6}\cdot\left\{\begin{array}{r} 1.3.4.5.6.7.8 \\ -\ 6.3.4.5.6.7. \\ +15.3.4.5.6 \\ -\ 20.3.4.5 \\ +15.3.4 \\ -\ 6.3 \\ +\ 1 \end{array}\right\}\cdot\frac{2.1}{3.4.5.6.7.8.9.10}$$

$$= \frac{9403}{32400}.$$

L X X.

Si $n = r$, la formule générale devient

$$\left\{\begin{array}{r} 1.\overline{p-n+1}.....p \\ -\ n.\overline{p-n+1}.....\overline{p-1} \\ +\frac{n.n-1}{1.2}.\overline{p-n+1}.....\overline{p-2} \\ -+..... \\ \pm 1 \end{array}\right\} : m.....\overline{m-n+1};$$

ainſi, ſur 10 cartes différentes données ſi on en nomme 6 une à une, aſſignant à chacune une place déterminée, & qu'on tire ſans choix une à une 8 des cartes données : la probabilité que dans les 8 cartes tirées toutes les nommées ſe trouveront, ſans qu'une ſeule arrive à la place qui lui a été aſſignée, eſt

$$\left\{\begin{array}{r} 1.3.4.5.6.7.8 \\ -\ 6.3.4.5.6.7 \\ +15.3.4.5.6 \\ -20.3.4.5 \\ +15.3.4 \\ -\ 6.3 \\ +\ 1 \end{array}\right\} : 10.9.8.7.6.5 = \frac{9403}{151400}.$$

Digitized by Google

LXXI.

Si $p=n=r$: La formule générale devient

$$\left\{\begin{array}{l} 1.\ \ 1.2.....p \\ -p.\ \ 1.2.....p-1 \\ +\frac{p.p-1}{1.2}.1.2.....p-2 \\ -+.....\\ \pm 1 \end{array}\right\} : m.....\overline{m-p+1} =$$

$$\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-.....\pm\frac{1}{1.2...p}\right).\frac{1.2.....p}{m...\overline{m-p+1}};$$

ainſi, ſur 10 cartes différentes données ſi on en nomme 8 une à une, en aſſignant à chacune une place déterminée; & qu'on tire ſans choix une à une 8 des cartes données : la probabilité que les 8 cartes tirées ſeront les 8 nommées ſans qu'une ſeule arrive à la place qui lui a été aſſignée dans le tirage, eſt

$$\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-.....+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}\right) : 45$$
$$=\frac{2119}{259200}.$$

LXXII.

Si $m=p$ & $r=n$: La formule générale devient

$$\left\{\begin{array}{l} 1.\overline{m-n+1}.....m \\ -n.\overline{m-n+1}.....\overline{m-1} \\ +\frac{n.n-1}{1.2}.\overline{m-n+1}.....\overline{m-2} \\ -+.....\\ \pm 1 \end{array}\right\} : m.....\overline{m-n+1};$$

ainſi, ſur 10 cartes différentes données ſi on en nomme 3 une à une, aſſignant à chacune une place déterminée, & ſi l'on tire ſans choix une à une les dix cartes données : la probabilité qu'aucune des cartes nommées ne ſe trouvera à la place du tirage qui lui a été aſſignée, eſt

Digitized by Google

$$\left\{\begin{matrix} 1.8.9.10 \\ -3.8.9 \\ +3.8 \\ -1 \end{matrix}\right\} : 10.9.8 = \frac{527}{720}$$

LXXIII.

Si $m = p = n = r$, la formule générale se réduit à $\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots m}$; ainsi, si l'on nomme successivement une à une 13 cartes données, & qu'à chaque carte qu'on nomme on tire aveuglément & sans choix une des 13 cartes données : la probabilité qu'aucune des cartes tirées ne sera celle qu'on nomme en même temps, est $\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \ldots - \frac{1}{1.2.3\ldots11.12.13} = \frac{63633137}{172972800}$.

LXXIV.

Si $r = o$; la formule générale devient $\frac{\overline{m-n\ldots\ldots\ldots}\,\overline{m-n-p+1}}{m\ldots\ldots\ldots\ldots\,\overline{m-p+1}}$; ainsi, si sur 13 cartes données on en nomme 4 dans un ordre déterminé, & qu'on en tire 6 une à une & sans choix : la probabilité que dans les 6 cartes tirées il n'y en aura aucune de celles qu'on a nommées, est $\frac{9\ldots\ldots4}{13\ldots\ldots8} = \frac{7}{143}$.

LXXV.

Problême II. Sur le nombre m total des chances dépendantes d'un état de choses donné, j'en distingue une partie, & représente par n le nombre des chances distinguées : je nomme successivement une à une les chances distinguées dans un ordre déterminé : il doit arriver successivement une à une un nombre p d'entre les m chances don-

nées : on demande de combien de manieres également poſſibles il peut ſe faire qu'aucune des n chances diſtinguées n'arrive dans la place que je lui ai aſſignée en la nommant.

SOLUT. Il eſt évident que le nombre cherché eſt compoſé du nombre des manieres dont 0, 1, 2, 3, 4, ... n des chances diſtinguées peuvent arriver ſans qu'une ſeule arrive à la place qui lui a été aſſignée en la nommant; c'eſt-à-dire, que le nombre cherché eſt la ſuite ſuivante : (LXV.)

$$1 \cdot \left\{ 1 \right\} \cdot \overline{m-n}.....\overline{m-n-p+1}$$

$$+\frac{n}{1} \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 \cdot p \\ -1 \end{matrix} \right\} \cdot \overline{m-n}.....\overline{m-n-p+2}$$

$$+\frac{n.\overline{n-1}}{1.2} \cdot \left\{ \begin{matrix} 1.\overline{p-1}.p \\ -2.p-1 \\ +1 \end{matrix} \right\} \cdot \overline{m-n}.....\overline{m-n-p+3}$$

$$+\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3} \cdot \left\{ \begin{matrix} 1.\overline{p-2}.\overline{p-1}.p \\ -3.\overline{p-2}.p-1 \\ +3.p-2 \\ -1 \end{matrix} \right\} \cdot \overline{m-n}....\overline{m-n-p+4}$$

$$+ \text{.....}$$

$$+1 \cdot \left\{ \begin{matrix} 1.\overline{p-n+1}.....p \\ -n.p-n+1.....\overline{p-1} \\ +\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.\overline{p-n+1}.....\overline{p-2} \\ +\text{.....} \\ +1 \end{matrix} \right\} \cdot \overline{m-n}....\overline{m-p+1};$$

C. Q. F. T.

LXXVI.

EXEMP. Sur 10 cartes différentes données j'en diſtingue 6 que je nomme une à une, aſſignant à chacune une place déterminée :

Sur les dix cartes données, on en tire 8 aveuglément & ſans choix; mais une à une & ſucceſſivement : il s'agit de ſavoir de combien de manieres

également possibles aucune des 6 cartes nommées peut ne se trouver à la place qui lui a été assignée dans le tirage.

Pour y parvenir, dans la formule générale qui vient d'être trouvée, je substitue 10 à m, 6 à n, 8 à p; & elle devient

$$\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot\left\{\begin{array}{r} 1\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 \\ -\ 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 \\ +\ 6\cdot 5\cdot 6 \\ -\ 4\cdot 5 \\ +\ 1 \end{array}\right\}\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

$$+\ 6\cdot\left\{\begin{array}{r} 1\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 \\ -\ 5\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 \\ +\ 10\cdot 4\cdot 5\cdot 6 \\ -\ 10\cdot 4\cdot 5 \\ +\ 5\cdot 4 \\ -\ 1 \end{array}\right\}\cdot 4\cdot 3\cdot 2$$

$$+\ 1\cdot\left\{\begin{array}{r} 1\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 \\ -\ 6\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 \\ +\ 15\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 \\ -\ 20\cdot 3\cdot 4\cdot 5 \\ +\ 15\cdot 3\cdot 4 \\ -\ 6\cdot 3 \\ +\ 1 \end{array}\right\}\cdot 4\cdot 3$$

$= 982812$; qui est le nombre cherché.

LXXVII.

Coroll. I. Si sur les m chances dépendantes d'un état de choses donné, on en nomme n une à une, assignant à chacune une place déterminée; & s'il doit arriver successivement une à une un nombre p d'entre les m chances données; la probabilité qu'aucune des n chances nommées n'arrivera dans la place qui lui a été assignée, est

$$\left(1\cdot\left\{\begin{array}{r}1\end{array}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+1}\right.$$

$$+n\cdot\left\{\begin{array}{r}1\cdot p\\ -1\end{array}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+2}$$

Digitized by Google

$$+\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}.\left\{\begin{matrix}1.\overline{p-1}.p\\ -2.p-1\\ +1\end{matrix}\right\}.\overline{m-n}.....\overline{m-n-p+3}$$

$$+.....$$

$$+1.\left\{\begin{matrix}1.\overline{p-n+1}.....p\\ -n.p-n+1.....p-1\\ +\frac{n.n-1}{1.2}.\overline{p-n+1}.....\overline{p-2}\\ -+.....\\ \pm 1\end{matrix}\right\}.\overline{m-n}.....\overline{m-p+1}\Big) :$$

$$m.....\overline{m-p+1}.$$

car le numérateur de cette probabilité eſt évidemment la formule générale trouvée au Problême II. ci-deſſus; & le dénominateur eſt $m.....\overline{m-p+1}$ (LXII.)

LXXVIII.

EXEMPLE. Si ſur 10 cartes différentes données, on en nomme 6 ſucceſſivement une à une: & que ſur les 10 cartes donnnées on en tire 8 aveuglément & ſans choix, mais une à une ſucceſſivement: la probabilité qu'aucune des 6 cartes nommées ne ſe trouvera à la place qui lui aura été aſſignée dans le tirage eſt $\frac{982812}{1814400}=\frac{1901}{151200}$.

LXXIX.

Si $n=p$, la formule générale devient

$$\left[1.(1).\ \overline{m-p}.....\overline{m-2p+1}\right.$$

$$+p.\left(\begin{matrix}1.p\\ -1\end{matrix}\right).\ \overline{m-p}.....\overline{m-2p+2}$$

$$+\frac{p.\overline{p-1}}{1.2}.\left(\begin{matrix}1.\overline{p-1}.p\\ -2.p-1\\ +1\end{matrix}\right).\overline{m-p}.....\overline{m-2p+3}$$

$$+.....$$

$$\left.+1\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-.....\pm\frac{1}{1.2...p}\right).1.2.....p\right] :$$

$$m.....\overline{m-p+1}.$$

Digitized by Google

ainſi, ſi ſur 10 cartes différentes données on en nomme 8 une à une, aſſignant à chacune une place déterminée, & qu'on tire ſans choix une à une 8 des cartes données : la probabilité que dans les 8 cartes tirées il ne ſe trouvera pas une ſeule des cartes nommées dans la place qui lui a été aſſignée, eſt

$$\left[\frac{8.7}{1.2}\cdot\left\{\begin{array}{r} 1.3.4.5.6.7.8 \\ -\ 6.3.4.5.6.7 \\ +15.3.4.5.6 \\ -20.3.4.5 \\ +15.3.4 \\ -\ 6.3 \\ +\ 1 \end{array}\right\}.2.1\right.$$

$$+\ 8.\left\{\begin{array}{r} 1.2.3.4.5.6.7.8 \\ -\ 7.2.3.4.5.6.7 \\ +21.2.3.4.5.6 \\ -35.2.3.4.5 \\ +35.2.3.4 \\ -21.2.3 \\ +\ 7.2 \\ -\ 1 \end{array}\right\}.2$$

$$\left.+\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\ldots\ldots+\frac{1}{1.2\ldots8}\right).1.2\ldots8\right]:$$

$$10.9.8.7.6.5.4.3. = \frac{818293}{1814400}.$$

L X X X.

Si $m=p$, la formule générale ſe réduit à

$$\left\{\begin{array}{r} 1.\overline{p-n+1}\ldots\ldots p \\ -n.\overline{p-n+1}\ldots\ldots p-1 \\ +\frac{n.n-1}{1.2}.\overline{p-n+1}\ldots\ldots p-2 \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +1 \end{array}\right\}:m\ldots\overline{m-n+1};$$

ainſi, ſi ſur 10 cartes différentes données on en nomme 6 une à une, aſſignant à chacune une place

déterminée, & qu'on tire ſans choix une à une les 10 cartes données : la probabilité qu'il n'arrivera dans le tirage aucune des 6 cartes nommées à la place qui lui a été aſſignée, eſt

$$\left\{\begin{array}{r} 1.5.6.7.8.9.10 \\ -6.5.6.7.8.9 \\ +15.5.6.7.8 \\ -20.5.6.7 \\ +15.5.6 \\ -6.5 \\ +1 \end{array}\right\} : 10.9.8.7.6.5 = \frac{81901}{151200}.$$

LXXXI.

Si $m = p = n$; la formule générale ſe reduit à

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots.m}.$$

qui eſt la même trouvée ci-deſſus (LXXIII.)

LXXXII.

Coroll. II. Si ſur les m chances dépendantes d'un état de choſes données, on en nomme n une à une, aſſignant à chacune une place déterminée : & s'il doit arriver ſucceſſivement une à une un nombre p d'entre les m chances données : la probabilité qu'une au moins d'entre les n chances nommées arrivera dans la place qui lui a été aſſignée, eſt

$$1 - \left[1 - \binom{1}{1}\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots.\overline{m-n-p+1}}{1.p}\right.$$

$$+ \binom{1}{1}\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots.\overline{m-n-p+2}}{1.p-1}$$

$$\left. + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\cdot\binom{1}{2}\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots.\overline{m-n-p+3}}{1.\overline{p-1}.p}\right.$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

$$+1.\ +\frac{n.n-1}{1.2}\cdot\frac{1.\overline{p-n+1}.....p}{\overline{n}.\overline{p-n+1}.....\overline{p-1}}\cdot\overline{p-n+1}.....\overline{p-2}\ .\overline{m-n}.....\overline{m-p+1}\ ]:$$
$$\overline{-+}.....$$
$$\overline{+1}$$
$$m.....\overline{m-p+1}\ .\quad \text{(XV. LXXVII.)}$$

Et si $n=p$; cette probabilité est

$$1-[1.(1)\ .\overline{m-p}.....\overline{m-2p+1}$$
$$+p.\left(\frac{1.p}{-1}\right)\ .\overline{m-p}.....\overline{m-2p+2}$$
$$+\frac{p.\overline{p-1}}{1.2}.\left(\frac{1.\overline{p-1}.p}{-2.\overline{p-1}}\right).\overline{m-p}.....\overline{m-2p+3}$$
$$+.....$$
$$+1\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-.....\pm\frac{1}{1.2....p}\right).$$
$$1.2.3.....p\ ]:\overline{m.....m-p+1}.$$

(XV. LXXIX.)

Et si $m=p$; cette probabilité est

$$1-\left\{\begin{array}{l}1\ .\overline{p-n+1}....p\\ \overline{-n}\ .\overline{p-n+1}....\overline{p-1}\\ +\frac{n.n-1}{1.2}.\overline{p-n+1}....\overline{p-2}\\ \overline{-+}.....\\ \overline{+1}\end{array}\right\}:m.....\overline{m-n+1}$$

(XV. LXXX.)

Et si $m=n=p$; cette probabilité est

$$1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4}+.....\pm\frac{1}{1.2.3.....m}.$$

Ainsi, si l'on nomme successivement une à une 13 cartes données; & si à chaque carte qu'on nomme, on tire aveuglément & sans choix une des 13 cartes données: la probabilité qu'il se trouvera au moins

Digitized by Google

une des cartes tirées qui ſera celle qu'on nomme en même temps, eſt

$$1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13}=\frac{109339663}{172972800}.$$

LXXXIII.

PROBLÊME III. Sur le nombre total m des chances dépendantes d'un état de choſes donné, on en nomme une partie au nombre n, aſſignant à chacune une place déterminée : il en doit arriver une partie au nombre p, une à une & ſucceſſivement : on demande quelle eſt la probabilité que dans les p chances qui arriveront il s'en trouve un nombre r juſte de celles qu'on a nommées ; chacune dans la place qui lui a été aſſignée, & un nombre t juſte de celles qu'on a nommées ailleurs que dans les places qui leur ont été aſſignées.

SOLUT. Pour avoir le numérateur de la probabilité cherchée : j'obſerve que le nombre de manieres dont ſur les n chances nommées on peut en prendre r pour les mettre chacune dans la place qui lui a été aſſignée, eſt $\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}$ (XL.)

Mais chacune de ces manieres étant déterminée ; il reſte $m-r$ d'entre les chances données, & $p-r$ chances qui doivent encore arriver, & ſur ces $n-r$ chances nommées, il faut en prendre t pour les mettre chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été aſſignée.

Or, le nombre des chances données étant $\overline{m-r}$, celui des chances nommées $\overline{n-r}$, celui des chances arrivantes $\overline{p-r}$; pour avoir le nombre de manieres dont parmi les $\overline{p-r}$ chances arrivantes il peut s'en trouver un nombre t juſte d'entre les $\overline{n-r}$ nom-

Digitized by Google

mées, ſans qu'une ſeule ſe trouve à la place qui lui a été aſſignée : il faut, dans la formule générale trouvée au Problême 1er. (LXV.) ſubſtituer $\overline{m-r}$ à m; $\overline{n-r}$ à n; $\overline{p-r}$ à p; t à r: au moyen de quoi elle devient

$$\frac{\overline{n-r}.....\overline{n-r-t+1}}{1.2.....t}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1\ .\overline{p-r-t+1}.....\overline{p-r} \\ -\ t\ .p-r-t+1.....p-r-1 \\ +\frac{t.t-1}{1.2}.\overline{p-r-t+1}.....\overline{p-r-2} \\ -+.....\\ +1 \end{array}\right\}\cdot$$

$$\overline{m-n}.....\overline{m-n-n\,p+r+t+1};$$

Donc cette quantité étant multipliée par $\frac{n....\overline{n-r+1}}{1.2....r}$ donnera un produit qui ſera le numérateur de la probabilité cherchée : dailleurs le dénominateur de cette même probabilité eſt toujours $m....\overline{m-p+1}$: Donc la probabilité cherchée eſt

$$\frac{n.\overline{n-1}.....\overline{n-r+1}}{1.2.....r}\cdot\frac{\overline{n-r}.....\overline{n-r-t+1}}{1.2.....t}\cdot$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1\ .\overline{p-r-t+1}...\overline{p-r} \\ -\ t\ .p-r-t+1...p-r-1 \\ +\frac{t.t-1}{1.2}.\overline{p-r-t+1}...\overline{p-r-2} \\ -+.....\\ +1 \end{array}\right\}\cdot\frac{\overline{m-n}....\overline{m-n-p+r+t+1}}{m.....\overline{m-p+1}};$$

C. Q. F. T.

LXXXIV.

EXEMPLE. Si ſur 10 cartes différentes données, on en nomme 6 ſucceſſivement une à une, aſſignant à chacune une place déterminée; ſi enſuite on tire aveuglément & ſans choix 8 d'entre les 10 cartes données, & qu'on deſire que dans les 8 cartes tirées il s'en trouve juſte 3 des nommées chacune à la place qui lui a été aſſignée, & 2 juſte des nom-

Digitized by Google

mées chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée : pour avoir la probabilité du hazard desiré ; dans la formule générale ci-dessus trouvée, je fais $m = 10$, $p = 8$, $n = 6$, $r = 3$, $t = 2$, & elle devient $\frac{6.5.4}{1.2.3} \cdot \frac{3.2}{1.2} \cdot \begin{pmatrix} 1.4.5 \\ -2.4 \\ +1 \end{pmatrix} \cdot \frac{4.3.2}{10.9..3} = \frac{13}{1260}$.

LXXXV.

PROBLÊME IV. Sur le nombre total m des chances dépendantes d'un état de choses donné, on en nomme une partie au nombre n, assignant à chacune une place déterminée ; il en doit arriver successivement une à une, un nombre p : on demande quelle est la probabilité que parmi les p chances qui arriveront, il s'en trouve un nombre t juste de celles qu'on a nommées chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée, & un nombre r au moins de celles qu'on a nommées ; chacune à la place qui lui a été assignée.

SOLUT. Pour avoir le numérateur de la probabilité cherchée, j'observe qu'il doit être composé des produits suivants, savoir ;

1°. Du nombre de manieres dont il peut arriver r juste des chances nommées chacune dans la place qui lui a été assignée, & t juste des nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée : Or, ce nombre de manieres est comme on vient de le voir par la solution du problême précédent

$$\frac{\overline{n-r}.....\overline{n-r-t+1}}{1.2.....t} \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad . \overline{p-r-t+1} ..... \overline{p-r} \\ -t \quad . p-r-t+1 ..... p-r-1 \\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2} . \overline{p-r-t+1} ..... \overline{p-r-2} \\ -+ ..... \\ +1 \end{array} \right\} \cdot$$

$$\frac{n.....\overline{n-r+1}}{1.2....r} \cdot \overline{m-n}.....\overline{m-n-p+r+t+1};$$

Digitized by Google

2°. Du nombre de manieres dont il peut arriver $\overline{r+1}$ juſte des chances nommées chacune à la place qui lui lui a été aſſignée, & t juſte des nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été aſſignée : or ce nombre de manieres eſt

$$\frac{\overline{n-r-1}.....\overline{n-r-t}}{1.2.....t} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot \overline{p-r-t}.....\overline{p-r-1} \\ -t \cdot \overline{p-r-t}.....\overline{p-r-2} \\ +\frac{t.t-1}{1.2} \cdot \overline{p-r-t}.....\overline{p-r-3} \\ -+..... \\ \pm 1 \end{array} \right\} \cdot$$

$$\frac{n.....\overline{n-r}}{1.2.....\overline{r+1}} \cdot \overline{m-n}.....\overline{m-n-p+r+t+2}$$

3°. Du nombre de manieres dont il peut arriver $\overline{r+2}$ juſte des chances nommées chacune à la place qui lui a été aſſignée, & t juſte des chances nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été aſſignée : or ce nombre de manieres eſt

$$\frac{\overline{n-r-2}.....\overline{n-r-t-1}}{1.2.....t} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot \overline{p-r-t-1}.....\overline{p-r-2} \\ -t \cdot \overline{p-r-t-1}.....\overline{p-r-3} \\ +\frac{t.t-1}{1.2} \cdot \overline{p-r-t-1}.....\overline{p-r-4} \\ -+..... \\ \pm 1 \end{array} \right\} \cdot$$

$$\frac{n.....\overline{n-r-1}}{1.2.....\overline{r+2}} \cdot \overline{m-n}.....\overline{m-n-p+r+t+3}$$

ainſi de ſuite :

Et enfin du nombre de manieres dont il peut arriver $\overline{n-t}$ juſte des chances nommées, chacune à la place qui lui a été aſſignée, & t juſte des nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été aſſignée : or, ce nombre de manieres eſt

Digitized by Google

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \\ -t \\ +\frac{t.t-1}{1.2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +1 \end{array}\right. \begin{array}{l} .\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-n+t} \\ .\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-n+t-1} \\ .\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-n+t-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \Bigg\} \cdot \frac{\overline{n\ldots\ldots t+1}}{1.2\ldots\ldots n-t}$$

$$\overline{m-n}.\ldots\ldots\overline{m-p+1}.$$

Donc le numérateur de la probabilité cherchée eſt la ſomme de tous ces produits particuliers : & par conſéquent cette probabilité eſt

$$\left[\frac{\overline{n-r\ldots\ldots n-r-t+1}}{1.2\ldots\ldots t}\right.\left\{\begin{array}{l} 1 \\ -t \\ +\frac{t.t-1}{1.2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +1 \end{array}\right. \begin{array}{l} .\overline{v-r-t+1}\ldots\ldots\overline{p-r} \\ .\overline{p-r-t+1}\ldots\ldots\overline{p-r-1} \\ .\overline{p-r-t+1}\ldots\ldots\overline{p-r-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \Bigg\} \cdot$$

$$\frac{\overline{n\ldots\ldots n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r} \cdot \overline{m-n}\ldots\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+t+1} +$$

$$\frac{\overline{n-r-1}\ldots\overline{n-r-t}}{1.2\ldots\ldots t} \cdot \left\{\begin{array}{l} 1 \\ -t \\ +\frac{t.t-1}{1.2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \end{array}\right. \begin{array}{l} .\overline{p-r-t}\ldots\overline{p-r-1} \\ .\overline{p-r-t}\ldots\overline{p-r-2} \\ .\overline{p-r-t}\ldots\overline{p-r-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \Bigg\} \cdot$$

$$\frac{\overline{n\ldots\ldots n-r}}{1.2\ldots\ldots r+1} \cdot \overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+t+2}$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ +$$

$$\frac{\overline{n\ldots\ldots t+1}}{1.2\ldots n-t} \cdot \left\{\begin{array}{l} 1 \\ -t \\ +\frac{t.t-1}{1.2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +1 \end{array}\right. \begin{array}{l} .\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-n+t} \\ .\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-n+t-1} \\ .\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-n+t-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \Bigg\} \cdot$$

$$\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-p+1}\ \Big] : \overline{m}\ldots\ldots\overline{m-p+1}. \quad C.Q.F.T.$$

Digitized by Google

LXXXVI.

Exemple. Si sur 12 cartes données on en nomme 8, assignant à chacune une place déterminée ; & qu'ensuite on en tire 10 une à une ; & qu'on desire que dans les 10 cartes tirées, il s'en trouve 2 juste des nommées ailleurs qu'aux places qui leur ont été assignées, & 4 au moins des nommées, chacune à la place qui lui a été assignée : pour avoir la probabilité du hazard desiré, dans la formule générale ci-dessus, je fais $m = 12$, $n = 8$, $p = 10$, $r = 4$, $t = 2$: & elle devient

$$\left[\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\begin{pmatrix}1\cdot 5\cdot 6\\ -2\cdot 5\\ +1\end{pmatrix}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 +\right.$$

$$\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}\cdot\begin{pmatrix}1\cdot 4\cdot 5\\ -2\cdot 4\\ +1\end{pmatrix}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 4\cdot 3\cdot 2 +$$

$$\left.\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}\cdot\begin{pmatrix}1\cdot 3\cdot 4\\ -2\cdot 3\\ +1\end{pmatrix}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot 43\right] : 12.11\ldots\ldots 3$$

$$= \frac{793}{12800}.$$

LXXXVII.

Problême V. Les mêmes suppositions étant faites que dans le Problême précédent : Trouver la probabilité que dans les p chances arrivantes, il y en aura un nombre t juste de celles qu'on a nommées chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée, & un nombre r au plus des nommées, chacune à la place qui lui a été assignée.

Solut. Pour avoir le numérateur de la probabilité cherchée, j'observe qu'il doit être composé des produits suivants, savoir ;

1°. Du nombre de manieres dont il peut arriver o juste des chances nommées chacune dans la place qui lui a été assignée, & t juste des nommées,

Digitized by Google

chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée: or, ce nombre de manieres est

$$\frac{n\ldots\ldots\overline{n-t+1}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1\ \ .\ \overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p} \\ -t\ \ .\ p-t+1\ldots\ldots p-1 \\ +\frac{t.t-1}{1.2}\cdot\overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\cdot$$

$$\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+1};$$

2°. Du nombre de manieres dont il peut arriver 1 juste d'entre les nommées, à la place qui lui a été assignée; & t juste des nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée: or, ce ce nombre de manieres est

$$\frac{\overline{n-1}\ldots\ldots\overline{n-t}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1\ \ .\ \overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-1} \\ -t\ \ .\ p-t\ldots\ldots p-2 \\ +\frac{t.t-1}{1.2}\cdot\overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-3} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\cdot$$

$$n.\overline{m-n}\ldots\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+2};$$

ainsi de suite: & enfin,

Du nombre de manieres dont il peut arriver r juste des nommées, chacune à la place qui lui a été assignée, & t juste des nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée: or, ce nombre de manieres est

$$\frac{\overline{n-r}\ldots\ldots\overline{n-r-t+1}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1\ \ .\ \overline{p-r-t+1}\ldots\ldots\overline{p-r} \\ -t\ \ .\ p-r-t+1\ldots\ldots p-r-1 \\ +\frac{t.t-1}{1.2}\cdot\overline{p-r-t+1}\ldots\ldots\overline{p-r-2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\cdot$$

$$\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+t+1}\ 5$$

Donc le numérateur de la probabilité cherchée est

eſt la ſomme de tous ces produits ; & par conſéquent cette probabilité eſt

$$\Bigg[\frac{n\ldots\ldots\overline{n-t+1}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{ll} 1 & .\overline{p-t+1}\ldots\ldots p \\ -t & .\overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-1} \\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2} & .\overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-2} \\ -+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 & \end{array}\right\}.$$

$$\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+1}$$

$$+\frac{\overline{n-1}\ldots\ldots\overline{n-t}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{ll} 1 & .\overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-1} \\ -t & .\overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-2} \\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2} & .\overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-3} \\ -+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 & \end{array}\right\}.$$

$$n.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+2}$$

$$+\frac{\overline{n-2}\ldots\overline{n-t-1}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{ll} 1 & .\overline{p-t-1}\ldots\ldots\overline{p-2} \\ -t & .\overline{p-t-1}\ldots\ldots\overline{p-3} \\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2} & .\overline{p-t-1}\ldots\ldots\overline{p-4} \\ -+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm & \end{array}\right\}.$$

$$\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+3}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$\frac{\overline{n-r}\ldots\ldots\overline{n-r-t+1}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{ll} 1 & .\overline{p-r-t+1}\ldots\overline{p-r} \\ -t & .\overline{p-r-t+1}\ldots\overline{p-r-1} \\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2} & .\overline{p-r-t+1}\ldots\overline{p-r-2} \\ -+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 & \end{array}\right\}.$$

$$\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots r}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+t+1}\Bigg]:$$

$$m\ldots\ldots\overline{m-p+1}.$$ *C. Q. F. T.*

L X X X V I I I.

Exemple. Si ſur 12 cartes données on en

nomme 8, assignant à chacune une place déterminée ; & qu'ensuite on en tire 10 une à une, & qu'on desire que dans les 10 cartes tirées il s'en trouve 2 juste des nommées ailleurs qu'aux places qui leur ont été assignées, & 3 au plus des nommées, chacune à la place qui lui a été assignée : pour avoir la probabilité du hazard desiré, dans la formule générale ci-dessus, je fais $m = 12$, $n = 8$, $p = 10$, $r = 3$, $t = 2$: & elle devient

$$\left[\frac{8.7}{1.2}\cdot\begin{pmatrix}1.9.10\\-2\,9\\+1\end{pmatrix}.1.4.3.2.1.0.-1.-2.-3\ +\right.$$

$$\frac{7.6}{1.2}\cdot\begin{pmatrix}1.8.9\\-2.8\\+1\end{pmatrix}.8.4.3.2.1.0.-1.-2\ +$$

$$\frac{6.5}{1.2}\cdot\begin{pmatrix}1.7.8\\-2.7\\+1\end{pmatrix}\cdot\frac{8.7}{1.2}\,4.3.2.1.0.-1\ +$$

$$\left.\frac{5.4}{1.2}\cdot\begin{pmatrix}1.6.7\\-2.6\\+1\end{pmatrix}\cdot\frac{8.7.6}{1.2.3}\cdot 4.3.2.1.0\right] : 12 \ldots\ldots 3 = 0 :$$

d'où l'on voit que le hazard desiré est impossible.

LXXXIX.

Remarque Ire. Si dans les formules générales trouvées aux Problêmes 3e, 4e, & 5e, on fait $t = o$; elles deviennent 1°.

$$\frac{n.\overline{n-1}\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots r}\cdot\frac{\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+1}}{m\ldots\ldots\ldots\overline{m-p+1}}\ ;$$

2°.

$$\left[\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots r}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+1}\right.$$

$$+\ \frac{n\ldots\ldots\overline{n-r}}{1.2\ldots\ldots\overline{r+1}}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+2}$$

$$+\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r-1}}{1.2\ldots\ldots\overline{r+2}}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+3}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+1.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-p+1}\,]:m\ldots\ldots\overline{m-p+1};$$

3°.

$$[\;1.\overline{m-n}\ldots\ldots\ldots\overline{m-n-p+1}$$
$$+n.\overline{m-n}\ldots\ldots\ldots\overline{m-n-p+2}$$
$$+\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+3}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots r}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+1}\;]:$$
$$m\ldots\ldots\overline{m-p+1};$$

qui ſont les probabilités qu'aucune des chances nommées n'arrivant allieurs qu'à la place qui lui a été aſſignée; il ſe trouvera parmi les p chances arrivantes, le nombre r $\left\{\begin{matrix}\text{juſte}\\\text{au moins}\\\text{au plus}\end{matrix}\right\}$ d'entre les n chances nommées, chacune dans la place qui lui aura été aſſignée.

Et ſi dans la premiere de ces expreſſions on ſubſtitue ſucceſſivement à r tous les nombres entiers depuis o juſqu'à n incluſivement, on aura,

4°.

$$[\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+1}+$$
$$n.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+2}+$$
$$\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+3}+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$1.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-p+1}\;]:m\ldots\ldots\ldots\overline{m-p+1};$$

pour la probabilité qu'aucune des chances nom-

mées n'arrivera ailleurs que dans la place qui lui aura été assignée.

X C.

PROBLÊME VI. Les mêmes choses étant supposées que dans les Problêmes précédents : on demande quelle est la probabilité que parmi les p chances arrivantes, il s'en trouvera un nombre r juste d'entre les n nommées, chacune à la place qui lui a été assignée, & un nombre t (au moins / au plus) d'entre les n nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée.

SOLUT. 1°. Dans l'expression générale trouvée au problême 3e. substituez successivement à t tous les nombres entiers depuis t jusqu'à $\overline{n-r}$ inclusivement : & elle devient

$$\frac{\overline{n.....n-r+1}}{1.2.....r.m.....\overline{m-p+1}}\cdot\left[\left\{\begin{array}{l} 1\cdot\overline{p-r-t+1}.....\overline{p-r} \\ -t.\overline{p-r-t+1}.....\overline{p-r-1} \\ +\frac{t.\overline{t-1}}{1.2}.\overline{p-r-t+1}.....\overline{p-r-2} \\ -+..... \\ \pm 1 \end{array}\right\}\cdot\frac{\overline{n-r}.....\overline{n-r-t+1}}{1.2.....t}\cdot\right.$$

$$\overline{m-n}.....\overline{m-n-p+r+t+1}\quad+$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1\cdot\overline{p-r-t}.....\overline{p-r} \\ -\overline{t+1}.\overline{p-r-t}.....\overline{p-r-1} \\ +\frac{t.t+1}{1.2}.\overline{p-r-t}.....\overline{p-r-2} \\ -+..... \\ \pm 1 \end{array}\right\}\cdot\frac{\overline{n-r}.....\overline{n-r-t}}{1.2....\overline{t+1}}\cdot$$

$$\overline{m-n}.....\overline{m-n-p+r+t+2}\quad+$$

$$.....+$$

$$\left\{\begin{array}{l} \quad 1\cdot\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-r} \\ -\overline{n-r}\cdot\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-r-1} \\ +\dfrac{\overline{n-r}.\overline{n-r-1}}{1.2}\cdot\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-r-2} \\ \quad -\quad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad +1 \end{array}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-p+1}\Big]$$

qui eſt la 1e. probabilité cherchée.

2°.

Dans la même formule génerale trouvée au Problême 3e. ſubſtituez ſucceſſivement à t tous les nombres entiers depuis o juſqu'à t, incluſivement: & elle devient

$$\frac{n\ldots\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots r.m\ldots\ldots\overline{m-p+1}}\cdot\Big[$$

$$1\cdot\left\{\begin{array}{l}1\end{array}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+1}+$$

$$\overline{n-r}\cdot\left\{\begin{array}{l}1\cdot\overline{p-r}\\-1\end{array}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+2}+$$

$$\frac{\overline{n-r}.\overline{n-r-1}}{1.2}\cdot\left\{\begin{array}{l}1.\overline{p-r-1}\ldots\overline{p-r}\\-2.\overline{p-r-1}\\+1\end{array}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+3}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left\{\begin{array}{l}1\cdot\overline{p-r-t+1}\ldots\ldots\overline{p-r}\\-t\cdot\overline{p-r-t+1}\ldots\ldots\overline{p-r-1}\\+\dfrac{t.\overline{t-1}}{1.2}\cdot\overline{p-r-t+1}\ldots\ldots\overline{p-r-2}\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\+1\end{array}\right\}\cdot$$

$$\frac{\overline{n-r}\ldots\ldots\overline{n-r-t+1}}{1.2\ldots t}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+t+1}\Big]$$

qui eſt la 2e. probabilité cherchée.

X C I.

Remarque 2e. Si dans les formules générales trouvées aux Problêmes 3e. & 6e. on fait $r=o$, elles deviennent 1°.

Digitized by Google

$$\frac{n\ldots\ldots\overline{n-t+1}}{1.2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1\ .\ \overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p} \\ -t\ .\ \overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-1} \\ +\frac{t.t-1}{1.2}.\ \overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}.$$

$$\frac{\overline{m-n}.\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+1}}{m\ldots\ldots\ldots\ldots\overline{m-p+1}};$$

2°.

$$\left[\frac{n\ldots\ldots\overline{n-t+1}}{1.2\ldots\ldots t}.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+1}.\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1\ .\ \overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p} \\ -t\ .\ \overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-1} \\ +\frac{t.t-1}{1.2}.\ \overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\} \quad +$$

$$\frac{n\ldots\ldots\overline{n-t}}{1.2\ldots\ldots\overline{t+1}}.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+2}.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1\ .\ \overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p} \\ -\overline{t+1}.\ \overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-1} \\ +\frac{t+1.t}{1.2}.\ \overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\} \quad +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad +$$

$$1.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-p+1}\ .$$

$$\left.\left\{\begin{array}{l} 1\ .\ \overline{p-n+1}\ldots\overline{p} \\ -n\ .\ \overline{p-n+1}\ldots\overline{p-1} \\ +\frac{n.n-1}{1.2}.\ \overline{p-n+1}\ldots\overline{p-2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +1 \end{array}\right\}\right] : m\ldots\ldots\overline{m-p+1}.$$

Digitized by Google

3°.

$$\left(1\cdot\left\{1\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+1}+\right.$$

$$n\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot p\\-1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+2}+$$

$$\frac{n\cdot\overline{n-1}}{1\cdot 2}\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot\overline{p-1}\cdot p\\-2\cdot\overline{p-1}\\+1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+3}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$\frac{n\ldots\ldots\overline{n-t+1}}{1\cdot 2\ldots\ldots t}\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot\overline{p-t+1}\ldots\ldots p\\-t\cdot p-t+1\ldots\ldots p-1\\+\frac{t\cdot t-1}{1\cdot 2}\cdot\overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-2}\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\+1\end{matrix}\right\}\cdot$$

$$\left.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+1}\right):m\ldots\ldots\overline{m-p+1}\cdot$$

qui ſont les probabilités qu'aucune des chances nommées n'arrivant à la place qu'on lui a aſſignée, il ſe trouvera parmi les p chances arrivantes le nombre t $\left\{\begin{matrix}\text{juſte}\\\text{au moins}\\\text{au plus}\end{matrix}\right\}$ d'entre les n chances nommées chacune ailleurs qu'à la place qui lui aura été aſſignée.

Et ſi dans la premiere de ces formules, on ſubſtitue ſucceſſivement à t tous les nombres entiers depuis o juſqu'à n incluſivement, on aura 4°. la formule déja trouvée (LXXVII.) pour la probabilité qu'aucune des chances nommées n'arrivera dans la place qui lui a été aſſignée.

XCII.

Remarque III. 1°. Si dans la formule générale trouvée au problême 4e. on ſubſtitue ſucceſſivement

à t tous les nombres entiers depuis $\left(\begin{smallmatrix} t \\ o \end{smallmatrix}\right.$ jusqu'à $\left.\begin{smallmatrix} \overline{n-r} \\ t \end{smallmatrix}\right)$ inclusivement, & qu'on ajoute ensemble tous les produits qui en naîtront : on aura pour somme la probabilité que dans les p chances arrivantes il s'en trouvera $\left(\begin{smallmatrix} \text{au moins} \\ \text{au plus} \end{smallmatrix}\right) t$, d'entre les n nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée; & un nombre r au moins d'entre les n nommées chacune à la place qui lui a été assignée.

2°. Si dans la formule générale trouvée au problême 5e. on substitue successivement à t tous les nombres entiers depuis $\left(\begin{smallmatrix} t \\ o \end{smallmatrix}\right.$ jusqu'à $\left.\begin{smallmatrix} n \\ t \end{smallmatrix}\right)$ inclusivement ; & qu'on prenne la somme de tous les produits qui en résulteront : cette somme sera la probabilité que dans les p chances arrivantes il s'en trouvera $\left(\begin{smallmatrix} \text{au moins} \\ \text{au plus} \end{smallmatrix}\right) t$ d'entre les n nommées chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été assignée : & un nombre r au plus d'entre les n nommées, chacune à la place qui lui a été assignée.

On trouveroit les mêmes probabilités, si dans la premiere formule du problême 6e. on substituoit successivement à r tous les nombres entiers depuis $\left(\begin{smallmatrix} r \\ o \end{smallmatrix}\right.$ jusqu'à $\left.\begin{smallmatrix} \overline{n-t} \\ r \end{smallmatrix}\right)$ inclusivement, en prenant la somme de tous les produits qui en résulteroient : & si dans la 2e. formule du même problême 6e. on substituoit successivement à r tous les nombres entiers depuis $\left(\begin{smallmatrix} r \\ o \end{smallmatrix}\right.$ jusqu'à $\left.\begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix}\right)$, & qu'on prit la somme de tous les produits qui en résulteroient.

XCIII.

PROBLÊME VII. Les mêmes choses étant sup-

posées que dans les problêmes précédents, trouver la probabilité qu'il arrivera un nombre t juſte d'entre les n chances nommées, chacune ailleurs qu'à la place qui lui a été aſſignée.

SOLUT. Dans la formule générale trouvée au Problême 3e. je ſubſtitue ſucceſſivement à r tous les nombres entiers depuis o juſqu'à $\overline{n-t}$ incluſivement, & j'ai pour la probabilité cherchée :

$$\left(1\frac{\overline{n\ldots n-t+1}}{1.2\ldots.t}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1\cdot\overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p} \\ -t\cdot\overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-1} \\ +\frac{t.t-1}{1.2}\cdot\overline{p-t+1}\ldots\ldots\overline{p-2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\cdot\right.$$

$$\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+1}\quad +$$

$$n\cdot\frac{\overline{n-1}\ldots\ldots\overline{n-t}}{1.2\ldots\ldots.t}\cdot\left\{\begin{array}{l} 1\cdot\overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-1} \\ -t\cdot\overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-2} \\ +\frac{t.t-1}{1.2}\cdot\overline{p-t}\ldots\ldots\overline{p-3} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\cdot$$

$$\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+t+2}\quad +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\quad +$$

$$\frac{n\ldots\ldots\overline{t+1}}{1.2\ldots\overline{n-t}}1.\left\{\begin{array}{l} 1\cdot\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-n+t} \\ -t\cdot\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-n+t-1} \\ +\frac{t.t-1}{1.2}\cdot\overline{p-n+1}\ldots\ldots\overline{p-n+t-2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\cdot$$

$$\left.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-p+1}\right) : m\ldots\ldots\overline{m-p+1}$$

C. Q. F. T.

XCIV.

REMARQUE IV. Si dans la formule générale ci-deſſus on ſubſtitue ſucceſſivement à t tous les nombres entiers depuis $\binom{t}{o}$ juſqu'à $\binom{n}{t}$ incluſivement, & qu'on prenne la ſomme de tous les produits ré-

Digitized by Google

ſultants de ces ſubſtitutions : cette ſomme ſera la probabilité que parmi les p chances arrivantes il s'en trouvera $\left(\begin{matrix}\text{au moins}\\ \text{au plus}\end{matrix}\right)$ t d'entre les n nommées, qui feront chacune ailleurs qu'à la place qui lui aura été aſſignée en la nommant.

XCV.

PROBLÊME VIII. Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans les Problêmes précédents : on demande la probabilité qu'il arrivera un nombre r juſte d'entre les chances nommées, leſquelles feront chacune à la place qui lui a été aſſignée.

SOLUT. Dans la formule générale trouvée au Problême 3e. je ſubſtitue ſucceſſivement à t tous les nombres entiers depuis o juſqu'à $\overline{n-r}$ incluſivement : j'ajoute enſemble tous les produits qui réſultent de cette ſubſtitution ; & j'ai pour ſomme

$$\frac{\overline{n....n-r+1}}{1.2....r}\cdot\left[1\left\{1\right\}.\overline{m-n}.....\overline{m-n-p+r+1}\right.$$

$$+\overline{n-r}\cdot\left\{\begin{matrix}1.\overline{p-r}\\-1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}....\overline{m-n-p+r+2}+$$

$$\frac{\overline{n-r.n-r-1}}{1.2}\cdot\left\{\begin{matrix}1.\overline{p-r-1}.\overline{p-r}\\-2.\overline{p-r-1}\\+1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}.....\overline{m-n-p+r+3}$$

$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ +$$

$$1.\left\{\begin{matrix}1.\overline{p-n+1}....\overline{p-r}\\-\overline{n-r}.\overline{p-n+1}....\overline{p-r-1}\\+\frac{\overline{n-r.n-r-1}}{1.2}.\overline{p-n+1}....\overline{p-r-2}\\-+.....\\\pm 1\end{matrix}\right\}.\overline{m-n}...\overline{m-p+1}\left.\right]:$$

$$\overline{m.....m-p+1}\ ;\ \text{qui eſt la probabilité cherchée.}$$

Digitized by Google

XCVI.

PROBLÊME IX. Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans les Problêmes précédents, on demande la probabilité qu'il arrivera un nombre r au moins d'entre les chances nommées, leſquelles ſeront chacune à la place qui lui a été aſſignée.

SOLUT. Dans la formule générale trouvée au Problême précédent, je ſubſtitue ſucceſſivement à r tous les nombres entiers depuis r juſqu'à n incluſivement, j'ajoute enſemble tous les produits réſultants de ces ſubſtitutions, & j'ai pour ſomme

$$\left(\frac{n....\overline{n-r+1}}{1.2.....r}\cdot\left[1.\left\{1\right\}\cdot\overline{m-n}....\overline{m-n-p+r+1}+\right.\right.$$

$$\overline{n-r}\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot\overline{p-r}\\-1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}.....\overline{m-n-p+r+2}+$$

$$\frac{\overline{n-r}.\overline{n-r-1}}{1.2}\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot\overline{p-r-1}.\overline{p-r}\\-2.\overline{p-r-1}\\+1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}.....\overline{m-n-p+r+3}+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+$$

$$1.\left\{\begin{matrix}1\\-\overline{n-r}\\+\frac{\overline{n-r}.\overline{n-r-1}}{1.2}\\-+.....\\\pm 1\end{matrix}\right.\left.\begin{matrix}\cdot\overline{p-n+1}.....\overline{p-r}\\\cdot\overline{p-n+1}.....\overline{p-r-1}\\\cdot\overline{p-n+1}.....\overline{p-r-2}\\.....\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}...\overline{m-p+1}\Big]$$

$$+\frac{n.....\overline{n-r}}{1.2....\overline{r+1}}\cdot\left[1.\left\{1\right\}\cdot\overline{m-n}.....\overline{m-n-p+r+2}+\right.$$

$$\overline{n-r-1}\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot\overline{p-r-1}\\-1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}....\overline{m-n-p+r+3}+$$

$$\frac{\overline{n-r-1}.\overline{n-r-2}}{1.2}\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot\overline{p-r-2}.\overline{p-r-1}\\-2.\overline{p-r-2}\\+1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}....\overline{m-n-p+r+4}+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+$$

Digitized by Google

$$1.\left\{\begin{array}{l} \quad 1 \quad .\overline{p-n-1}.\ldots\ldots\overline{p-r-1} \\ -\overline{n-r-1}\,.\,\overline{p-n-1}.\ldots\ldots\overline{p-r-2} \\ +\dfrac{\overline{n-r-1}.\overline{n-r-2}}{1.2}.\overline{p-n-1}.\ldots\ldots\overline{p-r-3} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}.$$

$$\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-p+1}\,]$$

$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$+\frac{n\,.\,\overline{n-1}}{1.2}.\,[\,1.\left\{1\right\}\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-p-1}\ +$$

$$2.\left\{\begin{array}{l} 1.\overline{p-n+2} \\ -1 \end{array}\right\}.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-p}\ +$$

$$1.\left\{\begin{array}{l} 1.\overline{p-n+1}\,.\,\overline{p-n+2} \\ -2.\overline{p-n+1} \\ +1 \end{array}\right\}.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-p+1}\,]$$

$$+n\,.\,[\,1.\left\{1\right\}.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-p}\ +$$

$$1.\left\{\begin{array}{l} 1.\overline{p-n+1} \\ -1 \end{array}\right\}.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-p+1}\,]$$

$$+1.[\,1.\left\{1\right\}.\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-p+1}\,]\,)\,:m\ldots\ldots\overline{m-p+1}$$

qui eſt la probabilité cherchée.

XCVII.

Problême X. Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans les Problêmes précédents, on demande la probabilité qu'il arrivera un nombre r au plus d'entre les chances nommées, leſquelles ſeront chacune à la place qui lui a été aſſignée.

Solut. Dans la formule générale trouvée au Problême 8e. je ſubſtitue ſucceſſivement à r tous les nombres entiers depuis o juſqu'à r incluſivement : j'ajoute enſemble les produits réſultants de ces ſubſtitutions, &. j'ai pour ſomme,

Digitized by Google

$$\left(1\cdot\left[1\cdot\left\{\begin{matrix}1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+1}\right.\right.+$$

$$n\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot p\\-1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+2}+$$

$$\frac{n\cdot\overline{n-1}}{1.2}\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot\overline{p-1}\cdot p\\-2\cdot\overline{p-1}\\+1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+3}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$1\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot\overline{p-n+1}\ldots p\\-n\cdot\overline{p-n+1}\ldots p-1\\+\frac{n\cdot\overline{n-1}}{1.2}\cdot\overline{p-n+1}\ldots p-2\\-+\ldots\ldots\ldots\\+1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-p+1}\left.\right]$$

$$+n\cdot\left[1\cdot\left\{\begin{matrix}1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+2}+\right.$$

$$\overline{n-1}\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot\overline{p-1}\\-1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+3}+$$

$$\frac{\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}}{1.2}\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot\overline{p-2}\cdot p-1\\-2\cdot\overline{p-1}\\+1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+4}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$1\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-1}\\-\frac{1}{n-1}\cdot\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-2}\\+\frac{\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}}{1.2}\cdot\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-3}\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-p+1}\left.\right]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{n\ldots\overline{n-r+1}}{1.2\ldots r}\left[1\cdot\left\{1\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+1}+\right.$$

$$\overline{n-r}\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot\overline{p-r}\\-1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\ldots\overline{m-n-p+r+2}+$$

$$\frac{\overline{n-r}\cdot\overline{n-r-1}}{1.2}\left\{\begin{matrix}\overline{p-r-1}\cdot\overline{p-r}\\2\cdot\overline{p-r-1}\\+1\end{matrix}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-n-p+r+3}+$$

Digitized by Google

. . . . . +

$$1.\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{-n-r}\cdot\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-r} \\ +\frac{\overline{n-r}\cdot\overline{n-r-1}}{1.2}\cdot\overline{p-n+1}\ldots\overline{p-r-2} \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\cdot\overline{m-n}\ldots\overline{m-p+1}\Big]\Big):$$

$m\ldots\ldots m-p+1$; qui eſt la probabilité cherchée.

XCVIII.

EXEMPLE. Étant données 10 cartes différentes entre leſquelles on en diſtingue 6 qu'on nomme ſucceſſivement une à une, aſſignant à chacune une place déterminée; ſi enſuite on tire ſucceſſivement une à une 8 des cartes données, & qu'on deſire que dans les 8 cartes tirées il s'en trouve 4 juſte de celles qu'on a diſtinguées, chacune à la place du tirage qui lui a été aſſignée : pour avoir la probabilité du hazard deſiré; dans l'expreſſion générale trouvée par le Problême 8e. je fais $m=10$, $p=8$, $n=6$, $r=4$, & elle devient . . . . . .

$$\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\cdot\Big[1.(1).4.3.2.1 +$$

$$2.\binom{1.4}{-1}.4.3.2 + 1.\binom{1.3.4}{-2.3}.4.3\Big]:$$

$$10.9.8.7.6.5.4.3 =$$

$$\frac{3780}{1814400} = \frac{1}{480}.$$

Si l'on deſire que dans les 8 cartes tirées il s'en trouve au moins 4 des nommées, chacune à la place qui lui a été aſſignée : pour avoir la probabilité du hazard deſiré, je fais les ſubſtitutions ci-deſſus dites dans la formule générale trouvée par le Problême 9e. & elle devient

Digitized by Google

$$\left\{\frac{6.5}{1.2}\cdot\left[1.(1).4.3.2.1+2.\left(\begin{matrix}1.4\\-1\end{matrix}\right).4.3.2\right.\right.$$
$$\left.+1\left(\begin{matrix}1.3.4\\-2.3\\+1\end{matrix}\right).4.3\right]\cdot+$$
$$6.\left[1.(1).4.3.2+.1\left(\begin{matrix}1.3\\-1\end{matrix}\right).4.3\right]+$$
$$\left.1.\left[1.(1).4.3\right]\right\}:10.9.8.7.6.5.4.3=$$
$$\frac{3780+288+12}{1814400}=\frac{85}{37800}.$$

Enfin, ſi l'on deſire que dans les 8 cartes tirées il s'en trouve au plus 3 des nommées, chacune à la place qui lui a été aſſignée : pour avoir la probabilité du hazard deſiré, je fais les ſubſtitutions ci-deſſus dites dans la formule générale trouvée par le Problême 10e. & elle devient

$$\left[1.\left(15.\left\{\begin{matrix}1.5.6.7.8\\-4.5.6.7\\+6.5.6\\-4.5\\+1\end{matrix}\right\}.4.3.2.1+\right.\right.$$
$$6.\left\{\begin{matrix}1.4.5.6.7.8\\-5.4.5.6.7\\+10.4.5.6\\-10.4.5\\+5.4\\-1\end{matrix}\right\}.4.3.2+$$
$$\left.\left.1.\left\{\begin{matrix}1.3.4.5.6.7.8\\-6.3.4.5.6.7\\+15.3.4.5.6\\-20.3.4.5\\+15.3.4\\-6.3\\+1\end{matrix}\right\}.4.3\right)\right.$$
$$+6.\left(10.\left\{\begin{matrix}1.5.6.7\\-3.5.6\\+3.5\\-1\end{matrix}\right\}.4.3.2.1+\right.$$

Digitized by Google

$$5\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\\-4\cdot4\cdot5\cdot6\\+6\cdot4\cdot5\\-4\cdot4\\+1\end{matrix}\right\}\cdot4\cdot3\cdot2+$$

$$1\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\\-5\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\\+10\cdot3\cdot4\cdot5\\-10\cdot3\cdot4\\+5\cdot3\\-1\end{matrix}\right\}\cdot4\cdot3)$$

$$+15\cdot(6\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot5\cdot6\\-2\cdot5\\+1\end{matrix}\right\}\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1+$$

$$4\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot4\cdot5\cdot6\\-3\cdot4\cdot5\\+3\cdot4\\-1\end{matrix}\right\}\cdot4\cdot3\cdot2+$$

$$1\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\\-4\cdot3\cdot4\cdot5\\+6\cdot3\cdot4\\-4\cdot3\\+1\end{matrix}\right\}\cdot4\cdot3)$$

$$+20\cdot(3\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot5\\-1\end{matrix}\right\}\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1+$$

$$3\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot4\cdot5\\-2\cdot4\\+1\end{matrix}\right\}\cdot4\cdot3\cdot2+$$

$$1\cdot\left\{\begin{matrix}1\cdot3\cdot4\cdot5\\-3\cdot3\cdot4\\+3\cdot3\\-1\end{matrix}\right\}\cdot4\cdot3)]:10.9.8.7.6.5.4.3$$

$$=\frac{982182+615168+180180+32160}{1814400}$$

$$\approx\frac{37715}{37800}.$$

CHAPITRE IV.

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

De la Probabilité des Hazards dans le cas de plusieurs épreuves.

§. XCIX.

Soit qu'un hazard spécifié consiste dans l'arrivée d'une seule d'entre les chances dépendantes d'un état de choses donné ; soit que ce hazard consiste dans l'arrivée d'un certain nombre de ces chances, ou simultanée, ou successive en un ordre quelconque ; soit que ce hazard consiste dans l'arrivée successive d'un certain nombre d'entre ces chances en un ordre déterminé ; soit enfin que la probabilité de ce hazard soit simple, ou qu'elle soit composée de plusieurs autres probabilités : la probabilité de ce hazard peut toujours être représentée par l'expression générale $\frac{n}{m}$, dont le dénominateur m exprimera le nombre total des chances, & le numérateur n le nombre de celles d'entre ces chances qui donnent le hazard spécifié. Or, dans toutes ces hypotheses, il peut arriver deux cas : ou bien l'acte duquel dépend le hazard spécifié n'a lieu qu'une seule fois ; & nous avons, dans les chapitres précédents, déterminé d'une maniere générale quelle est dans ce cas la probabilité du hazard spécifié : ou bien l'acte duquel dépend ce hazard est réitéré un certain nombre N de fois ; ou ce qui est de même, il y a un nombre N d'épreuves (XVI.) de cet acte : il s'agit de déterminer dans ce 2e. cas la

probabilité du hazard ſpécifié, dont la probabilité en une ſeule épreuve, eſt repréſentée par $\frac{n}{m}$: ce ſera la matiere de ce chapitre.

C.

THÉORÊME Ier. Nommant m le nombre des chances dépendantes d'un acte, mouvement ou état de choſes donné, dans le cas d'une ſeule épreuve: Je dis que le nombre des chances dépendantes du même acte, mouvement, ou état de choſes dans le cas d'un nombre N d'épreuves, eſt m^N.

DÉMONST. Suppoſant qu'il n'y a que deux épreuves; chacune des m chances données peut arriver à la premiere épreuve; & quelle que ſoit la chance arrivante à la premiere épreuve, chacune des m chances données peut arriver à la ſeconde épreuve: ainſi nommant a, b, c, d, — les m chances données, toutes les chances poſſibles dans le cas de 2 épreuves ſeront répréſentées par les termes de la table ſuivante, dont le nombre eſt m^2.

$a\,a$	$b\,a$	$c\,a$	$d\,a$	—
$a\,b$	$b\,b$	$c\,b$	$d\,b$	—
$a\,c$	$b\,c$	$c\,c$	$d\,c$	—
$a\,d$	$b\,d$	$c\,d$	$d\,d$	—
—	—	—	—	—

De même, quelles que ſoient les chances arrivantes aux deux premieres épreuves, chacune des m chances données peut arriver à la 3e. épreuve, & les chances, dans le cas de 3 épreuves, ſont repréſentées par les termes de la table ſuivante, dont le nombre eſt m^3.

Digitized by Google

a a a	*b a a*	*c a a*	*d a a*	——
a a b	*b a b*	*c a b*	*d a b*	——
a a c	*b a c*	*c a c*	*d a c*	——
a a d	*b a d*	*c a d*	*d a d*	——
a b a	*b b a*	*c b a*	*d b a*	——
a b b	*b b b*	*c b b*	*d b b*	——
a b c	*b b c*	*c b c*	*d b c*	——
a b d	*b b d*	*c b d*	*d b d*	——
a c a	*b c a*	*c c a*	*d c a*	——
a c b	*b c b*	*c c b*	*d c b*	——
a c c	*b c c*	*c c c*	*d c c*	——
a c d	*b c d*	*c c d*	*d c d*	——
a d a	*b d a*	*c d a*	*d d a*	——
a d b	*b d b*	*c d b*	*d d b*	——
a d c	*b d c*	*c d c*	*d d c*	——
a d d	*b d d*	*c d d*	*d d d*	——
——	——	——	——	——
——	——	——	——	——
——	——	——	——	——
——	——	——	——	——
——	——	——	——	——
——	——	——	——	——

ainſi de ſuite : & continuant à raiſonner de même, ou trouvera qu'en général le nombre des chances dans le cas d'une ſeule épreuve étant m, le nombre des chances dans le cas des N épreuves, eſt m^N. *C. Q. F. D.*

C I.

Coroll. Suppoſant toujours que la probabilité, dans le cas d'une ſeule épreuve, eſt $\frac{n}{m}$, le nombre des chances qui donnent le hazard ſpécifié dans le

cas d'une seule épreuve est n, & le nombre des chances qui ne donnent pas ce hazard est $\overline{m-n}$: donc le nombre des chances qui donnent le hazard à toutes les épreuves dans le cas de N épreuves est n^N, & le nombre des chances qui ne donnent le hazard dans aucune des N épreuves, est $(m-n)^N$: d'où l'on conclut 1°. que la probabilité que le hazard spécifié aura lieu dans toutes les N épreuves est $\frac{n^N}{m^N}$ ou $\left(\frac{n}{m}\right)^N$, proposition déja démontrée ci-dessus. (XXVI.) 2°. que la probabilité que le hazard spécifié n'aura lieu dans aucune des N épreuves, est $\frac{\overline{m-n}^N}{m^N}$ ou $\left(1-\frac{n}{m}\right)^N$.

CII.

Dans le cas de plusieurs épreuves d'un même acte ou mouvement qui a plusieurs résultats possibles, la probabilité de chacun de ces résultats augmente à mesure qu'il y a un plus grand nombre d'épreuves: par exemple, la probabilité d'amener doublet en jettant une seule fois sur une table 2 dés à jouer ordinaires, étant $\frac{1}{6}$; la probabilité d'amener doublet en 3 jets consécutifs semblables doit être plus grande que $\frac{1}{6}$: cependant la probabilité n'augmente pas alors en raison du nombre des épreuves; mais comme une certaine fonction combinée de la probabilité en une seule épreuve, & du nombre des épreuves. Cette fonction est déterminée par le Théorême suivant.

CIII.

Théorême II. La probabilité d'un hazard dans le cas de plusieurs épreuves est égale à l'unité moins

Digitized by Google

la différence de l'unité à la probabilité de ce hazard en une seule épreuve, élevée à la puissance du degré exprimé par le nombre des épreuves.

Ainsi nommant $\frac{n}{m}$ la probabilité du hazard en une seule épreuve, N le nombre des épreuves, P la probabilité du même hazard dans le nombre d'épreuves exprimé par N; on a $P = 1 - (1 - \frac{n}{m})^N$.

Dem. On vient de voir (CI.) qu'en supposant que la probabilité du hazard dans le cas d'une seule épreuve est $\frac{n}{m}$, & que le nombre des épreuves est N; la probabilité que le hazard n'arrivera dans aucune des N épreuves, est $(1 - \frac{n}{m})^N$: donc la probabilité de l'effet contraire, c'est-à-dire, la probabilité que le hazard dont il s'agit, arrivera dans quelqu'une des N épreuves, est $1 - (1 - \frac{n}{m})^N$. (XIV & XV.) . *C. Q. F. D.*

CIV.

Coroll. I. Étant donnée la probabilité d'un hazard en une seule épreuve, on en déduira la probabilité de ce même hazard dans un nombre déterminé N d'épreuves ; par conséquent le rapport des mises qu'on peut équitablement parier pour & contre ce hazard, & le nombre d'épreuves qui sont nécessaires pour qu'il puisse être parié avec avantage à mises égales que ce hazard arrivera :

Par exemple : la probabilité d'amener un doublet par le jet de 2 dés à jouer étant $\frac{1}{6}$; la probabilité d'amener doublet

Digitized by Google

en $\left\{\begin{array}{l}2\\3\\4\\\&c.\end{array}\right.$ jets, eſt $\left\{\begin{array}{l}1-\left(\frac{5}{6}\right)^2\\1-\left(\frac{5}{6}\right)^3\\1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\\\&c.\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{l}\frac{11}{36}\\\frac{91}{216}\\\frac{671}{1296}\\\&c.\end{array}\right.$;

d'où l'on voit, qu'on peut parier avec quelqu'avantage, à miſes égales, d'amener doublet en 4 jets de dés, parce que $\frac{671}{1296} > \frac{1}{2}$; & que pour parier équitablement d'amener doublet en $\left\{\begin{array}{l}2\\3\\4\end{array}\right.$ jets, il faut que les miſes ſoient entr'elles

$:: \left\{\begin{array}{l}11 : 25\\91 : 125\\671 : 625\end{array}\right\}$ (XVIII.).

CV.

COROLL. II. De ces trois quantités : la probabilité d'un hazard en une ſeule épreuve, le nombre des épreuves, & la probabilité du hazard en ce nombre d'épreuves, deux étant données, déterminent la 3e ; car de l'égalité $P = 1-\left(1-\frac{n}{m}\right)^N$, on déduit $\frac{n}{m} = 1 \quad \sqrt[N]{1-P}$, & $N = \frac{log.(1-P)}{log.\left(1-\frac{n}{m}\right)}$.

CVI.

COROLL. III. Si $n = \frac{m}{2}$: ce qui eſt le cas du pari équitable à miſes égales, en une ſeule épreuve ; la probabilité du même hazard en un nombre donné N d'epreuves, ſera $1-\frac{1}{2^N}$; car alors la quantité $1-\left(1-\frac{n}{m}\right)^N$ devient $1-\left(1-\frac{1}{2}\right)^N$, ou $1-\left(\frac{1}{2}\right)^N$, ou $1-\frac{1}{2^N}$.

Digitized by Google

CVII.

COROLL. IV. Si le nombre N des épreuves eſt infini, la fraction $(1-\frac{n}{m})^N$ devient infiniment petite ou nulle ; & alors $P=1$: d'où l'on voit que le hazard le moins probable dans une ſeule épreuve, ou même dans un nombre fini d'épreuves, devient certain en ſuppoſant le nombre des épreuves infini.

CVIII.

COROLL. V. Si P ou $1-(1-\frac{n}{m})^N=\frac{1}{2}$; on aura $\frac{n}{m}=1-\frac{1}{\sqrt[N]{2}}$; d'où l'on voit que ſi un hazard acquiert dans un nombre donné d'épreuves la probabilité $\frac{1}{2}$, la probabilité de ce hazard en une ſeule épreuve eſt incommenſurable :

Et réciproquement, que ſi la probabilité de ce hazard en une ſeule épreuve eſt commenſurable, ce hazard ne peut acquérir exactement la probalité $\frac{1}{2}$ dans un nombre entier déterminé d'épreuves.

CIX.

THÉORÊME III. Suppoſant 1°. que deux hazards différents dépendent d'un même acte ou état de choſes donné ; 2°. que n eſt le nombre des chances qui donnent le 1er. de ces hazards en une ſeule épreuve, que p eſt le nombre des chances qui donnent le 2e. hazard en une ſeule épreuve ; 3°. qu'aucune de ces chances ne donne les deux hazards à la fois : Je dis que le nombre de manieres d'avoir M fois juſte le 1er. hazard, & P fois juſte le 2e. hazard dans un nombre $\overline{M+P}$ d'épreuves, eſt

$$\frac{\overline{M+P}.....\overline{M+1}}{1.2.....P}\cdot n^M.p^P.$$

Digitized by Google

DEM. Nommant a, b, c, d, — les n chances qui donnent le 1er. hazard dans le cas d'une ſeule épreuve, a', b', c', d' — les p chances qui donnent le 2e. hazard dans le cas d'une ſeule épreuve; on vient de voir, par le Théorême 1er, que le nombre de manieres dont le 1er. hazard peut toujours arriver en M épreuves eſt n^M, & que le nombre de manieres dont le 2e. hazard peut toujours arriver en P épreuves, eſt p^P.

Or ſi $P = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \cdots \\ P \end{cases}$; les $\begin{cases} 1 \\ 1 \text{ ou } 2 \\ 1, 2 \text{ ou } 3 \\ 1, 2, 3 \text{ ou } 4 \\ \cdots\cdots \\ 1, 2, 3 \ldots \text{ ou } P \end{cases}$

chances qui compoſent chacune des

$\begin{cases} p \\ p^2 \\ p^3 \\ p^4 \\ \cdots\cdots \\ p^P \end{cases}$ manieres, dont quelques unes d'entre les p

chances a', b', c' d', — peuvent toujours arriver en

$\begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \cdot \\ P \end{cases}$ épreuves, peuvent ſans aucune interruption

d'ordre entr'elles, être mêlées avec les chances qui donnent le 1er. hazard, & arriver dans les

Digitized by Google

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{llll} 1^e, & 2^e, & 3^e, & 4^e, \text{ — } M+1^e. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{llll} 1^e \text{ \& } 2^e, & 1^e \text{ \& } 3^e, & 1^e \text{ \& } 4^e, \text{ — } 1^e \text{ \& } \overline{M+2^e}. \\ & 2^e \text{ \& } 3^e, & 2^e \text{ \& } 4^e, \text{ —} \\ & & 3^e \text{ \& } 4^e, \text{ —} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{llll} 1^e, 2^e \text{ \& } 3^e; & 1^e, 2^e \text{ \& } 4^e; \text{ —} \\ & 1^e, 3^e \text{ \& } 4^e; \text{ —} \\ & 2^e, 3^e \text{ \& } 4^e; \text{ —} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{llll} & 1^e, 2^e, 3^e \text{ \& } 4^e; \text{ —} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

épreuves; ce qui peut se faire de

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{M+1} \\ \dfrac{\overline{M+2}.\overline{M+1}}{1.2} \\ \dfrac{\overline{M+3}.\overline{M+2}.\overline{M+1}}{1.2.3} \\ \dfrac{\overline{M+4}.\overline{M+3}.\overline{M+2}.\overline{M+1}}{1.2.3.4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\overline{M+P}.\ldots\ldots.\overline{M+1}}{1.2.\ldots\ldots.P}; \end{array}\right\} \text{manieres;}$$

donc le nombre de manieres dont le 1er. hazard peut arriver M fois, & le 2e. P fois dans $\overline{M+P}$ épreuves eſt $\dfrac{\overline{M+P}.\ldots.\overline{M+1}}{1.2.\ldots.P} \cdot n^M.p^P$; *C.Q.F.D.*

Comme cette démonſtration pourroit paroître trop abſtraite à quelques lecteurs; pour la rendre plus ſenſible, je l'applique à un cas particulier.

Je ſuppoſe que $n=3$, $p=4$, $M=3$, $P=2$; toutes les manieres dont le 1er hazard peut arriver en trois épreuves ſont repréſentées par les termes de la table ſuivante:

Digitized by Google

$a\,a\,a$ $b\,a\,a$ $c\,a\,a$
$a\,a\,b$ $b\,a\,b$ $c\,a\,b$
$a\,a\,c$ $b\,a\,c$ $c\,a\,c$
$a\,b\,a$ $b\,b\,a$ $c\,b\,a$
$a\,b\,b$ $b\,b\,b$ $c\,b\,b$
$a\,b\,c$ $b\,b\,c$ $c\,b\,c$
$a\,c\,a$ $b\,c\,a$ $c\,c\,a$
$a\,c\,b$ $b\,c\,b$ $c\,c\,b$
$a\,c\,c$ $b\,c\,c$ $c\,c\,c$

qui ſont au nombre de 3^3.

Toutes les manieres d'amener le 2e. hazard en 2 épreuves ſont repréſentées par les termes de la table ſuivante,

$a^1\,a^1$ $b^1\,a^1$ $c^1\,a^1$ $d^1\,a^1$
$a^1\,b^1$ $b^1\,b^1$ $c^1\,b^1$ $d^1\,b^1$
$a^1\,c^1$ $b^1\,c^1$ $c^1\,c^1$ $d^1\,c^1$
$a^1\,d^1$ $b^1\,d^1$ $c^1\,d^1$ $d^1\,d^1$

qui ſont au nombre de 4^2.

Mais chacune des manieres d'amener le 1er. hazard trois fois peut être combinée avec chacune des manieres d'amener le 2e hazard deux fois, de $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$ manieres ; car le terme $b\,a\,c$, entr'autres, peut ſans interruption d'ordre, être combiné avec le terme $b^1\,d^1$ des $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$ manieres ſuivantes

$b^1\,d^1\,b\,a\,c$ $b^1\,b\,d^1\,a\,c$ $b^1\,b\,a\,d^1\,c$ $b^1\,b\,a\,c\,d^1$
$b\,b^1\,d^1\,a\,c$ $b\,b^1\,a\,d^1\,c$ $b\,b^1\,a\,c\,d^1$
$b\,a\,b^1\,d^1\,c$ $b\,a\,b^1\,c\,d^1$
$b\,a\,c\,b^1\,d^1$

Il en eſt de même de la combinaiſon de chacun des termes de la 1re. table avec chacun des termes de la 2e : d'où l'on voit que le nombre des manieres d'avoir le 1er. hazard trois fois & le 2e hazard deux fois en cinq épreuves, eſt $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 3^3 \cdot 4^2$.

Digitized by Google

CX.

Coroll. Ier. Si d'un même acte ou état de choſes donné dépendent trois hazards différents : que $\left\{\begin{matrix} n \\ p \\ q \end{matrix}\right.$ ſoit le nombre des chances qui donnent en une ſeule épreuve le $\left\{\begin{matrix} 1^{er}. \\ 2^{e}. \text{ hazard} \\ 3^{e}. \end{matrix}\right.$ ſans qu'il y ait aucune de toutes ces chances qui donnent pluſieurs des hazards à la fois : je dis que le nombre des manieres également poſſibles dont en $\overline{M+P+Q}$ épreuves le 1er hazard peut arriver M fois juſte, le 2e P fois, le 3e Q fois, eſt $\frac{\overline{M+P+Q}.....\overline{M+1}}{1.2.....\overline{P+Q}}$, $\frac{\overline{P+Q}.....\overline{P+1}}{1.2.....Q}$, $n^M.p^P.q^Q$; car, comme on vient de le voir, le nombre de manieres dont le 2e hazard peut arriver P fois & le 3e Q fois en $\overline{P+Q}$ épreuves eſt $\frac{\overline{P+Q}.....\overline{P+1}}{1.2.....Q}.p^P.q^Q$; le nombre des manieres dont le 1er hazard peut toujours arriver en M épreuves eſt n^M ; & chacune des n^M manieres d'avoir M fois le 1er hazard en M épreuves, peut ſe combiner ſans interruption d'ordre, avec chacune des manieres d'amener le 2e hazard P fois & le 3e Q fois en $\overline{P+Q}$ épreuves, de $\frac{\overline{M+P+Q}.....\overline{M+1}}{1.2....\overline{P+Q}}$ manieres ; donc, &c.

Il eſt facile, en ſuivant le même raiſonnement, de faire voir que s'il y a 4 hazards dont les probabilités ſoient entr'elles comme n, p, q & r ; le nombre de manieres également poſſibles d'avoir en $\overline{M+P+Q+R}$ épreuves le 1er. hazard M fois, le 2e. P fois, le 3e. Q fois, le 4e. R fois, eſt

Digitized by Google

$$\frac{\overline{M+P+Q+R\ldots\ldots M+1}}{1.2\ldots\ldots\overline{P+Q+R}} \cdot \frac{\overline{P+Q+R\ldots\ldots P+1}}{1.2\ldots\overline{Q+R}} \cdot$$

$$\frac{\overline{Q+R\ldots\ldots Q+1}}{1.2\ldots\ldots R} \cdot n^M \cdot p^P \cdot q^Q \, r^R,$$

ainſi de ſuite : d'où l'on conclura qu'en général, s'il y a un certain nombre de hazards dépendants d'un même acte ou état de choſes donné dont les probabilités ſoient entr'elles comme $n, p, q, r, s\ldots$; le nombre de manieres également poſſibles d'avoir en $\overline{M+P+Q+R+S\ldots\ldots}$ épreuves M fois le 1er. hazard, P fois le 2e. Q fois le 3e. R fois le 4e. S fois 5e. &c. eſt

$$\frac{\overline{M+P+Q+R+S+\ldots\ldots}\times\ldots\ldots\times\overline{M+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots\overline{P+Q+R+S+\ldots\ldots}} \cdot$$

$$\frac{\overline{P+Q+R+S+\ldots\ldots}\times\ldots\ldots\times\overline{P+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots\overline{Q+R+S+\ldots\ldots\ldots}} \cdot$$

$$\frac{\overline{Q+R+S+\ldots\ldots}\times\ldots\ldots\times\overline{Q+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots\overline{R+S+\ldots\ldots\ldots}} \cdot$$

$$\frac{\overline{R+S+\ldots\ldots}\times\ldots\ldots\times\overline{R+1}}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots\overline{S+\ldots\ldots\ldots}} \times\ldots\ldots\times$$

$$n^M \cdot p^P \cdot q^Q \cdot r^R \cdot s^S \times\ldots\ldots\ldots$$

CXI.

COROLL. II. Si pluſieurs hazards dépendent d'un même acte mouvement ou état de choſes donné ; que $\begin{cases} n \\ p \\ q \\ \ldots. \end{cases}$ ſoit le nombre des chances qui donnent en une ſeule épreuve le $\begin{cases} 1^{er}. \\ 2^{e}. \\ 3^{e}. \\ \ldots. \end{cases}$ de ces hazards, & qu'aucune chance ne donne pluſieurs de ces hazards

à la fois; que m ſoit le nombre des chances dépendantes de l'acte, mouvement ou état de choſes donné; la probabilité d'avoir dans $\overline{M+P+Q+\ldots\ldots}$ épreuves, M fois le 1er. hazard, P fois le 2e. Q fois le 3e. &c. eſt

$$\frac{\overline{M+P+Q+\ldots.}\times\ldots.\times\overline{M+1}}{1.2.\ldots.\overline{P+Q+\ldots\ldots}}\cdot\frac{\overline{P+Q+\ldots.}\times\ldots.\times\overline{P+1}}{1.2.\ldots\ldots.\overline{Q+\ldots.}}$$

$$\times\ldots.\times n^M.p^P.q^Q\times\ldots.\times\frac{1}{m^{M+P+Q+\ldots\ldots}}$$

Si le nombre total des épreuves eſt N nombre plus grand que $\overline{M+P+Q+\ldots\ldots}$; cette probabilité ſera

$$\frac{N\ldots.\overline{M+P+Q+\ldots+1}}{1.2\ldots\overline{N-M-P-Q-\ldots}}\cdot\frac{}{m-n-p-q-\ldots.}\overline{N-M-P-Q-\ldots.}\times$$

$$\frac{\overline{M+P+Q+\ldots}\times\ldots\times\overline{M+1}}{1.2.\ldots.\overline{P+Q+\ldots}}\cdot\frac{\overline{P+Q+\ldots}\times\ldots\times\overline{P+1}}{1.2\ldots\overline{Q+\ldots}}\times\ldots\times$$

$$n^M.p^P.q^Q.\times\ldots.\times\frac{1}{m^N}.$$

car les $\overline{m-n-p-q-\ldots\ldots}$ chances qui ne donnent aucun des hazards ſpécifiés, peuvent arriver dans les $\overline{N-M-P-Q-\ldots.}$ épreuves, où l'on ne demande aucun de ces hazards de

$$\frac{}{m-n-p-q-\ldots.}\overline{N-M-P-Q-\ldots\ldots}$$ manieres également poſſibles (C.): & chacune de ces manieres peut, ſans aucune interverſion d'ordre, être combinée avec chacune des

$$\frac{\overline{M+P+Q+\ldots.}\times\ldots.\times\overline{M+1}}{1.2.\ldots.\overline{P+Q+\ldots.}}\cdot\frac{\overline{P+Q+\ldots.}\times\ldots.\times\overline{P+1}}{1.2.\ldots.\overline{Q+\ldots.}}\times$$

$\ldots.\times n^M.p^P.q^Q.\times\ldots$ manieres d'avoir le réſultat demandé, de $\frac{N\ldots.\overline{M+P+Q+\ldots.+1}}{1.2.\ldots.\overline{N-M-P-Q-\ldots.}}$ manieres.

Digitized by Google

CXII.

EXEMPLES. Je jette 20 fois de ſuite ſur une table un dé à jouer ordinaire : pour avoir la probabilité d'amener dans les 20 jets, $\left\{\begin{matrix}3\\5\\2\\4\\5\\1\end{matrix}\right\}$ fois le point $\left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix}\right\}$; dans l'expreſſion générale ci-deſſus je fais $N=20$, $M=3$, $P=5$, $Q=2$, $R=4$, $S=5$, $T=1$; $m=6$; $n=p=q=r=s=t=1$; & elle devient

$$\frac{20.....4}{1.2....17}\cdot\frac{17.....6}{1.2....12}\cdot\frac{12.....3}{1.2....10}\cdot\frac{10.....5}{1.2.....6}\cdot\frac{6}{1}\cdot\frac{1}{6^{20}}$$

$$=\frac{18.19.20}{1.2.3}\cdot\frac{13.14.15.16.17}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{11.12}{1.2}\cdot\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{6^{19}}$$

$=\frac{56581525}{352638738432}$, qui eſt la probabilité cherchée.

Je jette 8 fois de ſuite ſur une table 2 dés à jouer ordinaires : pour avoir la probabilité d'amener $\left\{\begin{matrix}2\\2\\1\\1\end{matrix}\right\}$ fois le point $\left\{\begin{matrix}5\text{ \& }4\\3\text{ \& }2\\\text{ſonnet}\\\text{quine}\end{matrix}\right\}$; dans l'expreſſion générale je fais

$N=8$, $M=2$, $P=2$, $Q=1$, $R=1$; $m=36$; $n=2$, $p=2$, $q=1$, $r=1$; & elle devient

$$\frac{8.7}{1.2}\cdot\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\cdot\frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{2}{1}\cdot 2^2.2^2.30^2.\frac{1}{36^8}=$$

$\frac{875}{34012224}$, qui eſt la probabilité cherchée.

CXIII.

THÉORÈME. IV. La probabilité d'un hazard dans le cas d'une ſeule épreuve étant $\frac{n}{m}$; la probabilité que ce hazard arrivera le nombre de fois M

juſte dans un nombre N d'épreuves, eſt

$$\frac{N.\overline{N-1}.....\overline{N-M+1}}{1.2.....M}\cdot\frac{n^M}{m^N}\cdot\overline{m-n}^{\overline{N-M}}.$$

Dem. 1°. Dans la formule générale $\frac{\overline{M+P}....\overline{M+1}}{1.2.....P}$. $n^M.p^P$ trouvée par le Théorême précédent, ſi je ſubſtitue $\overline{m-n}$ à p & $\overline{N-M}$ à P; j'aurai

$$\frac{N.\overline{N-1}.....\overline{M+1}}{1.2.....\overline{N-M}}\cdot n^M.\overline{m-n}^{\overline{N-M}} \text{ ou}$$

$$\frac{N.\overline{N-1}.....\overline{N-M+1}}{1.2.....M}\cdot n^M.\overline{m-n}^{\overline{N-M}}$$

(XXXII, XXXIV.) pour le numérateur de la probabilité dont il s'agit.

2°. Le dénominateur de la probabilité cherchée eſt m^N (C.); donc cette probabilité eſt

$$\frac{N.\overline{N-1}.....\overline{N-M+1}}{1.2.....M}\cdot\frac{n^M}{m^N}\cdot\overline{m-n}^{\overline{N-M}}: C.\ Q.\ F.\ D.$$

CXIV.

Exemple. Si l'on demande quelle eſt la probabilité d'amener deux fois ſeulement le point 5 & 4 en quatre jets de deux dés à jouer ordinaires: dans l'expreſſion générale ci-deſſus je fais $N=4$, $M=2$, $m=36$, $n=2$, & elle devient $\frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{2^2}{36^4}\cdot 34^2=\frac{289}{17496}$. qui eſt la probabilité cherchée.

CXV.

Théorême V. Repréſentant par $\frac{n}{m}$ la probabilité d'un hazard dans le cas d'une ſeule épreuve: la probabilité que ce hazard arrivera le nombre de fois $M-1$ au plus, en un nombre N d'épreuves, eſt

Digitized by Google

$$\left\{1-\frac{n}{m}\right\}^N\left\{1+N\cdot\frac{n}{m-n}+\frac{N.\overline{N-1}}{1.2}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{N.\overline{N-1}.\overline{N-2}}{1.2.3}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^3+\ldots\ldots+\right.$$
$$\left.\frac{N.\overline{N-1}\ldots\ldots\overline{N-M+2}}{1.2\ldots\ldots\overline{M-1}}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^{\overline{M-1}}\right\}$$

DEM. J'aurai la probabilité dont il s'agit en substituant dans la formule trouvée au Théorême précédent, à la quantité M tous les nombres entiers depuis o jusqu'à $\overline{M-1}$ inclusivement, & prenant la somme de tous les produits, qui sera

$$\left\{1-\frac{n}{m}\right\}^N\left\{1+N\cdot\frac{n}{m-n}+\ldots+\frac{N\ldots\overline{N-M+2}}{1.2\ldots\overline{M-1}}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^{\overline{M-1}}\right\}$$

C. Q. F. D.

CXVI.

EXEMPLE. Si je prends 3 des numéros de la lotterie royale de France: pour avoir la probabilité que ces 3 numéros arriveront une fois au plus dans l'un des 4 tirages prochains; dans l'expression générale ci-dessus je substitue
1 à n; 11748 à m; (LI.) 4 à N; 2 à M; & elle devient

$$\left(\frac{11747}{11748}\right)^4\left\{1+4\cdot\frac{1}{11747}\right\}=\frac{\overline{11747}^3}{\overline{11748}^4}\cdot 11751$$
$$=\frac{6249426172124991}{6349426448124672}.$$

CXVII.

THÉORÊME VI. Représentant toujours par $\frac{n}{m}$ la probabilité d'un hazard dans le cas d'une seule épreuve: la probabilité que ce hazard arrivera le nombre de fois M au moins en un nombre N d'épreuves, est

1 —

$$1-\left\{1-\frac{n}{m}\right\}^N\left\{1+N\frac{n}{m-n}+\ldots+\frac{N\ldots\overline{N-M+2}}{1.2\ldots\overline{M-1}}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^{\overline{M-1}}\right\}.$$

Démonst. Pour avoir la probabilité dont il s'agit, il faut retrancher de l'unité la formule générale du Théorême précédent : donc, &c. *C. Q. F. D.*

CXVIII.

Coroll. Si $M=1$, l'expreſſion générale qui vient d'être trouvée ſe réduit à $1-\left(1-\frac{n}{m}\right)^N$, laquelle a deja été démontrée au Théorême 2e. & ſi $M=N$, cette même formule devient

$$1-\left\{1-\frac{n}{m}\right\}^N\left\{\left(1+\frac{n}{m-n}\right)^N-\left(\frac{n}{m-n}\right)^N\right\}$$

(Formule de Newton pour les puiſſances)

$$=1-\frac{\overline{m-n}^N}{m^N}\cdot\frac{m^N-n^N}{\overline{m-n}^N}=1-\frac{m^N-n^N}{m^N}=\left(\frac{n}{m}\right)^N;$$

propoſition déja démontrée ci-deſſus (XXVI & CI.).

CXIX.

Remarque Ire. Si dans la formule générale du Théorême 4e. on eut ſubſtitué ſucceſſivement à M tous les nombres entiers depuis M juſqu'à N inclusivement, & qu'on eut pris la ſomme de tous les produits réſultants de ces ſubſtitutions : on auroit eu

$$\left(\frac{n}{m}\right)^N\left\{1+N.\frac{n}{m-n}+\ldots\ldots+\frac{N\ldots\ldots\overline{N-M+1}}{1.2\ldots\ldots M}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^{\overline{N-M}}\right\},$$

expreſſion qui équivaut à celle du Théorême 6e. quoique ſous une forme différente : & ſi on retranche de l'unité cette derniere expreſſion ; on aura

$$1-\left\{\frac{n}{m}\right\}^N\left\{1+N\frac{n}{m-n}+\ldots+\frac{N\ldots\overline{N-M+1}}{1.2\ldots M}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^{N-M}\right\}$$

Digitized by Google

expreſſion équivalente à celle qui a été démontrée au Théorême 5e.

CXX.

REMARQUE II. Connoiſſant la probabilité $\frac{n}{m}$ d'un hazard dans le cas d'une ſeule épreuve, & la probabilité P que ce même hazard arrivera un nombre connu $\left\{\begin{matrix} M \text{ juſte} \\ M-1 \text{ au plus} \\ M \text{ au moins} \end{matrix}\right\}$ de fois dans un nombre inconnu N d'épreuves : pour connoître le nombre N d'épreuves au moyen deſquelles ce hazard acquiert la probabilité P d'arriver $\left\{\begin{matrix} M \text{ fois juſte} \\ M-1 \text{ fois au plus} \\ M \text{ fois au moins} \end{matrix}\right\}$: dans l'expreſſion générale démontrée au Théorême $\left\{\begin{matrix} 4^e \\ 5^e \\ 6^e \end{matrix}\right\}$; je ſubſtituerai ſucceſſivement à N, les nombres M, $M+1$, $M+2$, $M+3$, ainſi de ſuite, juſqu'à ce que cette expreſſion devienne égale à la fraction donnée P, ou la plus approchante qu'il ſera poſſible de la valeur de cette fraction. Par exemple : Si l'on demande en combien de jets de deux dés à jouer ordinaires, on peut parier équitablement, ou le plus équitablement qu'il ſera poſſible, à miſes égales, d'amener le point 7 au moins deux fois : dans l'expreſſion générale

$$1 - \left\{1 - \frac{n}{m}\right\}^N \cdot \left\{1 + N\frac{n}{m-n} + \ldots\ldots + \frac{N \ldots \overline{N-M+2}}{1.2\ldots\ldots\overline{M-1}} \cdot \left(\frac{n}{m-n}\right)^{\overline{M-1}}\right\}$$

je ſubſtitue 2 à M, $\frac{1}{6}$ à $\frac{n}{m}$; elle devient $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N \cdot \left(1 + \frac{N}{5}\right)$ que j'égale à $\frac{1}{2}$. Dans cette derniere formule je ſubſtitue ſucceſ-

Digitized by Google

sivement à N les nombres entiers 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, &c. & cette derniere formule devient par ces substitutions

Si $N = 2$, $\frac{1}{36}$; Si $N = 3$, $\frac{2}{27}$;

Si $N = 4$, $\frac{19}{144}$; Si $N = 5$, $\frac{763}{3888}$;

Si $N = 6$, $\frac{12281}{46656}$; Si $N = 7$, $\frac{7703}{23328}$;

Si $N = 8$, $\frac{663991}{1579616}$; Si $N = 9$, $\frac{2304473}{5038848}$;

Si $N = 10$, $\frac{10389767}{20155392}$. D'où l'on voit qu'il y a quelque désavantage de parier à mises égales que le point 7 arrivera au moins 2 fois en 9 coups, & quelque avantagede parier la même chose en 10 coups, & que le pari ne peut jamais être parfaitement équitable.

CXXI.

Si $\left\{\begin{matrix}\frac{n}{m} \\ M\end{matrix}\right.$, P & N sont connus & $\left\{\begin{matrix}M \\ \frac{n}{m}\end{matrix}\right.$ inconnue : on pourra trouver, par des substitutions successives semblables, la valeur de l'inconnue : d'où l'on voit que de ces 4 quantités, savoir 1°. la probabilité qu'un hazard arrivera en une seule épreuve, 2°. la probabilité que ce hazard arrivera un certain nombre de fois juste ou au moins ou au plus en un certain nombre d'épreuves, 3°. le nombre de fois que le hazard doit probablement arriver, 4°. le nombre des épreuves ; trois étant données, on pourra toujours trouver la quatrieme.

CXXII.

Problême. Supposant 1°. que m est le nombre total des chances dépendantes d'un état de choses

donné, 2°. que $\frac{n}{m}$ & $\frac{p}{m}$ sont les probabilités en une seule épreuve de deux hazards dépendants de ce même état de choses, 3°. que φ est le nombre des chances qui donnent ces deux hazards à la fois, 4°. que $\left\{\begin{matrix} y, n-\varphi \\ z, p-\varphi \end{matrix}\right.$ est le nombre des chances qui donnent le $\left\{\begin{matrix} 1^{er}. \\ 2^{e}. \end{matrix}\right.$ hazard sans donner le $\left\{\begin{matrix} 2^{e}. \\ 1^{er}. \end{matrix}\right\}$, & que $u, m-n-p+\varphi$ est le nombre des chances qui ne donnent aucun des 2 hazards: on demande quelle est la probabilité que dans un nombre N d'épreuves, le 1er. hazard arrivera M fois juste, & le 2e. P fois juste.

Solut. 1°. Il peut se faire qu'il n'arrive aucune des φ chances qui donnent les deux hazards à la fois; & dans ce cas, le nombre de manieres d'avoir M fois le 1er. hazard, P fois le 2e. & $N-M-P$ fois aucun des 2 hazards est (CX.)

$$\frac{N.....\overline{M+1}}{1.2....N-M}\cdot\frac{\overline{N-M}.....\overline{P+1}}{1.2....N-M-P}\cdot\frac{M\ P\ \overline{N-M-P}}{y\cdot z\cdot u}.$$

2°. Il peut se faire qu'il arrive en une épreuve une des φ chances qui donnent les 2 hazards à la fois; & dans ce cas, chacune de ces φ chances peut arriver à N épreuves différentes: d'ailleurs le nombre de manieres d'avoir $M-1$ fois le 1er. hazard, & $P-1$ le 2e. est $\frac{\overline{N-1}.....M}{1.2....N-M}\cdot\frac{\overline{N-M}.....P}{1.2.....N-M-P+1}\cdot\frac{\overline{M-1}\,\overline{P-1}\,\overline{N-M-P+1}}{y\cdot z\cdot u}$ qu'il faut multiplier par $N\varphi$.

3°. Il peut se faire qu'une ou 2 des φ chances qui donnent les 2 hazards à la fois arrivent en 2 épreuves; & dans ce cas le nombre des manieres d'avoir le résultat desiré, est

$$\frac{N-2\ldots\ldots M-1}{1.2\ldots\ldots N-M}\cdot\frac{N-M\ldots\ldots P-1}{1.2\ldots\ldots N-M-P+2}\cdot y^{M-2}\,z^{P-2}\,u^{N-M-P+2}\cdot\frac{N.N-1}{1.2}\cdot\varphi^2$$

; ainſi de ſuite : & enfin

Il peut ſe faire que 1, 2, 3.... ou P des φ chances qui donnent les 2 hazards à la fois arrivent en P épreuves, que le 1er. hazard ſeul arrive en $M-P$ épreuves, & aucun des 2 hazards dans les $N-M$ autres épreuves, ce qui peut arriver de

$$\frac{N-P\ldots M-P+1}{1.2\ldots\ldots N-M}\cdot y^{M-P}\,u^{N-M}\cdot\frac{N\ldots N-P+1}{1.2\ldots\ldots P}\cdot\varphi^P$$

manieres; donc la probabilité cherchée eſt

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{N\ldots M+1}{1.2\ldots N-M}\cdot\frac{N-M\ldots P+1}{1.2\ldots N-M-P}\cdot y^{M-P}\,z^{P-1}\,u^{N-M-P}\,MP\\ +\frac{N-1\ldots M}{1.2\ldots N-M}\cdot\frac{N-M\ldots P}{1.2\ldots N-M-P+1}\cdot y^{M-1}\,z^{P-1}\,u^{N-M-P+1}\,.\,N\varphi\\ +\frac{N-2\ldots M-1}{1.2\ldots N-M}\cdot\frac{N-M\ldots P-1}{1.2\ldots N-M-P+2}\cdot y^{M-2}\,z^{P-2}\,u^{N-M-P+2}\cdot\frac{N.N-1}{1.2}\cdot\varphi^2\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\frac{N-P\ldots M-P+1}{1.2\ldots N-M}\cdot y^{M-P}\,u^{N-M}\cdot\frac{N\ldots N-P+1}{1.2\ldots P}\cdot\varphi^P\end{array}\right\}:m^N;$$

C. Q. F. T.

CXXIII.

EXEMPLE. Si l'on demande quelle eſt la probabilité d'amener, en 8 jets de 2 dés à jouer ordinaires, 4 fois juſte le point 6, & 2 fois juſte un doublet : je fais dans la formule générale ci-deſſus $N=8$, $M=4$, $P=2$, $\varphi=1$, $m=36$, $t=5$, $f=6$,

Digitized by Google

& par conſéquent $y=4$, $z=5$, $u=26$: & elle devient $\left(\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\cdot\frac{4.3}{1.2}\cdot 4^4\cdot 5^2\cdot 26^2+\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\cdot\frac{4.3.2}{1.2.3}\cdot 4^3\cdot 5^1\cdot 26^3\cdot 8\cdot 1+\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\cdot 4^2\cdot 1\cdot 26^4\cdot\frac{8.7}{1.2}\cdot 1\right) : 36^8 = \frac{10925005}{2754990144}$.

CXXIV.

REMARQUES. 1°. Si dans la formule générale ci-deſſus on ſubſtitue ſucceſſivement à M tous les nombres entiers depuis $\left\{\begin{smallmatrix}0\\M\end{smallmatrix}\right.$ juſqu'à $\left.\begin{smallmatrix}M\\N-P\end{smallmatrix}\right\}$ incluſivement, & qu'on prenne la ſomme de tous les produits réſultants de ces ſubſtitutions ; on aura une nouvelle formule $\left\{\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right.$ qui ſera la probabilité d'avoir P fois juſte le 2e. hazard, & M fois $\left\{\begin{smallmatrix}\text{au plus}\\\text{au moins}\end{smallmatrix}\right.$ le 1er. hazard.

2°. Si dans la formule générale ci-deſſus on ſubſtitue ſucceſſivement à P tous les nombres entiers depuis $\left\{\begin{smallmatrix}0\\P\end{smallmatrix}\right.$ juſqu'à $\left.\begin{smallmatrix}P\\N-M\end{smallmatrix}\right\}$ incluſivement, & qu'on prenne la ſomme de tous les produits réſultants de ces ſubſtitutions; on aura une formule $\left\{\begin{smallmatrix}C\\D\end{smallmatrix}\right.$ qui ſera la probabilité d'avoir M fois juſte le 1er. hazard, & P fois $\left\{\begin{smallmatrix}\text{au plus}\\\text{au moins}\end{smallmatrix}\right.$ le 2e. hazard.

3°. Si dans la formule générale A on ſubſtitue ſucceſſivement à P tous les nombres entiers depuis $\left\{\begin{smallmatrix}0\\P\end{smallmatrix}\right.$ juſqu'à $\left.\begin{smallmatrix}P\\N-M\end{smallmatrix}\right\}$ incluſivement, & qu'on prenne la ſomme de tous les produits réſultants de ces

Digitized by Google

ſubſtitutions ; on aura une nouvelle formule $\left\{\begin{matrix} E \\ F \end{matrix}\right.$ qui ſera la probabilité d'avoir M fois au plus le 1er. hazard, & P fois $\left\{\begin{matrix} \text{au plus} \\ \text{au moins} \end{matrix}\right.$ le 2e. hazard.

4°. Si dans la formule générale B on ſubſtitue ſucceſſivement à P tous les nombres entiers depuis $\left\{\begin{matrix} 0 \\ P \end{matrix}\right.$ juſqu'à $\left\{\begin{matrix} P \\ N-M \end{matrix}\right\}$ incluſivement, & qu'on prenne la ſomme des produits réſultants de ces ſubſtitutions ; on aura une nouvelle formule $\left\{\begin{matrix} G \\ H \end{matrix}\right.$ qui ſera la probabilité d'avoir M fois au moins le 1er. hazard, & P fois $\left\{\begin{matrix} \text{au plus} \\ \text{au moins} \end{matrix}\right.$ le 2e. hazard.

5°. Si dans les formules C & D on ſubſtitue ſucceſſivement à M tous les nombres entiers depuis $\left\{\begin{matrix} 0 \\ M \end{matrix}\right.$ juſqu'à $\left\{\begin{matrix} M \\ N-P \end{matrix}\right\}$ incluſivement, & qu'on prenne la ſomme de tous les produits réſultants de ces ſubſtitutions ; on aura quatre nouvelles formules générales équivalentes aux formules E, F, G & H.

CXXV.

Si dans la formule générale H on fait $M=1$ & $P=1$, elle ſe réduira à

$$\frac{u^N - \overline{m-n}^N - \overline{m-p}^N + \overline{m-n-p+\varphi}^N}{m^N};$$

qui eſt la probabilité d'amener les 2 hazards au moins une fois chacun en un nombre N d'épreuves.

CXXVI.

EXEMPLE. Si on demande quelle eſt la probabilité d'amener au moins une fois le point 6 &

doublet en 4 jets de 2 dés à jouer ordinaires : dans la formule ci-dessus je fais $m=36$, $n=5$, $p=6$, $\varphi=1$, $\overline{m-n}=31$, $\overline{m-p}=30$, $\overline{m-n-p+\varphi}=26$, $N=4$, & elle devient $\frac{36^4-31^4-30^4+26^4}{36^4}=\frac{403071}{1679616}=\frac{134357}{559872}$.

CXXVII.

Si l'on desire savoir en combien de jets de 2 dés à jouer ordinaires, on peut parier le plus équitablement qu'il est possible à mises égales d'amener le point 6 & un doublet : dans l'expression $\frac{36^N-31^N-30^N+26^N}{36^N}$ je substitue successivement à N tous les nombres entiers 2, 3, 4, 5, &c. jusqu'à ce que cette quantité devienne la plus approchante qu'il est possible de la valeur $\frac{1}{2}$, & le nombre, qui étant substitué à N remplira cette condition, sera le nombre cherché. Or je trouve, en faisant ce calcul, que si $N=8$, l'expression devient $\frac{1333128798591}{2821109907456}$ qui est un peu moindre que $\frac{1}{2}$: & que si $N=9$, la même expression devient $\frac{559835926507 21}{1015599566684 16}$ qui est un peu plus grande que $\frac{1}{2}$: d'où l'on voit qu'il y a quelque désavantage de parier à mises égales que le point 6 & un doublet arriveront en 8 jets ; & qu'il y a quelque avantage de parier aux mêmes conditions que ces deux hazards arriveront au moins une fois chacun en neuf coups de dés.

CXXVIII.

Si l'on a 3 hazards dont les probabilités soient $\frac{n}{m}$, $\frac{p}{m}$, $\frac{q}{m}$, dépendants du même acte, mouve-

Digitized by Google

ment ou état de choſes donné; que x, y, z ſoient le nombre des chances qui donnent le 1er, le 2e, le 3e. hazard ſeul; que φ, φ', φ'', φ''' ſoient le nombre des chances qui donnent le 1er. & le 2e. hazard à la fois, le 1er. & le 3e. hazard à la fois, le 2e. & le 3e. hazard à la fois, les 3 hazards à la fois, & qu'on deſire avoir la probabilité que dans N épreuves, le 1er. hazard arrivera M fois juſte, le 2e. hazard P fois juſte, le 3e. hazard Q fois juſte: on trouvera cette probabilité en raiſonnant comme on a fait dans le problême précédent d'après le §. CX.: mais on aura une expreſſion beaucoup plus compoſée, qui ſera, non pas une ſuite ſimple ni même une ſuite de ſuites, mais une ſuite de termes dont chacun ſera une ſuite de laquelle chaque terme ſera une ſuite de ſuites.

En effet: on aura d'abord, comme dans le problême précédent, une ſuite de termes dont chacun ſera l'expreſſion

$$\frac{N.....\overline{M+1}}{1.2.....\overline{N-M}}\cdot\frac{\overline{N-M}....\overline{P+1}}{1.2.....\overline{N-M-P}}\cdot\frac{\overline{N-M-P}....\overline{Q+1}}{1.2....\overline{N-M-P-Q}}\cdot\frac{M\,P\,Q\,\overline{N-M-P-Q}}{x\,.\,y\,.\,z\,.\,u}$$

réguliérement modifiée; leſquels termes ſeront multipliés, le 1er. par 1, le 2e. par $N\varphi$, le 3e. par $\frac{N.\overline{N-1}}{1.2}\varphi^2$, le 4e. par $\frac{N.\overline{N-1}.\overline{N-2}}{1.2.3}\varphi^3$, ainſi de ſuite, & enfin le dernier par $\frac{N....\overline{N-P+1}}{1.2.....P}\cdot\varphi^P$

Mais cette derniere ſuite ne ſera elle-même que le 1er. terme d'une autre ſuite dans laquelle les termes, dont chacun ſera cette derniere ſuite réguliérement modifiée, ſeront ſucceſſivement multipliés par 1, $N\varphi'$, $\frac{N.\overline{N-1}}{1.2}\cdot\varphi'^2$, ...$\frac{N...\overline{N-Q+1}}{1.2.....Q}\cdot\varphi'^Q$.

Digitized by Google

De-là, cette derniere ſuite ne ſera elle-même que le 1er. terme d'une autre ſuite dans laquelle les termes, dont chacun ſera cette derniere ſuite réguliérement modifiée, ſeront multipliés ſucceſſivement par $1, N\varphi^{II}, \frac{N.\overline{N-1}}{1.2}.\varphi^{II^2}, \ldots \frac{N.\ldots\overline{N-Q+1}}{1.2.\ldots\ldots Q}\varphi^{II}Q$.

De-là enfin, cette derniere ſuite ne ſera elle-même que le 1er. terme d'une autre ſuite dans laquelle les termes, dont chacun ſera cette derniere ſuite réguliérement modifiée, ſeront multipliés ſucceſſivement par $1, N\varphi^{III}, \ldots\ldots \frac{N.\ldots\overline{N-Q+1}}{1.2.\ldots\ldots Q}.\varphi^{III}Q$.

Cette ſuite ainſi formée ſera le numérateur de la probabilité dont il s'agit, de laquelle m^N eſt le dénominateur.

On pourra d'ailleurs, au moyen de cette derniere probabilité, trouver les probabilités que le 1er. hazard arrivant M fois juſte, ou au plus ou au moins, & le 2e. P fois juſte, au plus ou au moins, le 3e. hazard arrivera Q fois juſte, ou au plus ou au moins; ſuivant la méthode indiquée au §. CXXIV.

CXXIX.

On pourroit étendre plus loin ces recherches, & trouver les probabilités d'avoir en N épreuves, juſte, ou au moins ou au plus, M fois un hazard dont la probabilité eſt $\frac{n}{m}$, P fois un hazard dont la probabilité eſt $\frac{p}{m}$, Q fois un hazard dont la probabilité eſt $\frac{q}{m}$, R fois un hazard dont la probabilité eſt $\frac{r}{m}$, S fois un hazard dont la probabilité eſt $\frac{s}{m}$, &c. mais ces calculs meneroient fort

Digitized by Google

loin ; il ſuffit d'en avoir indiqué la voie au lecteur, & de l'avoir mis à portée de les faire au beſoin ; ſans le fatiguer inutilement ici par des ſpéculations arides & trop compliquées.

CXXX.

Si l'on aſſigne à chacun des hazards déſignés le rang de l'épreuve à laquelle on deſire qu'il arrive : la probabilité que les hazards déſignés arriveront chacun à l'épreuve qui lui a été aſſignée eſt compoſée des probabilités des hazards déſignés (XXIV. XXV. XXVI.). Si l'on demande, par exemple, que le hazard dont la probabilité eſt $\frac{n}{m}$ arrive à la 1re. épreuve, celui dont la probabilité eſt $\frac{p}{m}$ à la 2e. épreuve, celui dont la probabilité eſt $\frac{q}{m}$ à la 3e. épreuve : la probabilité de l'effet demandé eſt $\frac{npq}{m^3}$.

Si l'on demande que 2 ſeulement des trois hazards déſignés arrivent aux épreuves qui leur ont été aſſignées : la probabilité de l'effet demandé eſt $\frac{np.\overline{m-q}+nq.\overline{m-p}+pq.\overline{m-n}}{m^3}$.

Si l'on demande qu'un ſeul des trois hazards déſignés arrive à l'épreuve qui lui a été aſſignée ; la probabilité de l'effet demandé eſt $\frac{n.\overline{m-p}.\overline{m-q}+p.\overline{m-n}.\overline{m-q}+q.\overline{m-n}.\overline{m-p}}{m^3}$.

Si l'on demande qu'aucun des 3 hazards déſignés n'arrive à l'épreuve qui lui a été aſſignée : la probabilité de l'effet demandé eſt $\frac{\overline{m-n}.\overline{m-p}.\overline{m-q}}{m^3}$.

Si l'on demande que 2 au moins des 3 hazards déſignés arrivent aux épreuves qui leur ont été aſſignées ; la probabilité de l'effet demandé eſt

$\frac{npq+np.\overline{m-q}+nq.\overline{m-p}+pq.\overline{m-n}}{m^3}$ ou

$\frac{mnp+q.(n.\overline{m-p}+p.\overline{m-n})}{m^3}$.

Si l'on demande qu'un au plus des 3 hazards désignés arrive à l'épreuve qui lui a été assignée : la probabilité de l'effet demandé est

$\frac{m.\overline{m-p}.\overline{m-q}+\overline{m-n}.(p.\overline{m-q}+q.\overline{m-p})}{m^3}$.

Si l'on demande que dans N épreuves, deux au moins des trois hazards désignés arrivent aux épreuves qui leur ont été assignées, & qu'un 4e. hazard dont la probabilité est $\frac{r}{m}$ arrive au moins une fois dans les $N-3$ autres épreuves : la probabilité de l'effet demandé sera

$\frac{mnp+q(n.\overline{m-p}+p.\overline{m-n})}{m^3}.\left\{1-\left(1-\frac{r}{m}\right)^{N-3}\right\}$;

ainsi des autres.

CXXXI.

Si au lieu de réitérer, un nombre N de fois consécutives, l'acte ou mouvement duquel dépendent les hazards ; on avoit ou si on produisoit en même temps un nombre N d'actes ou mouvements semblables, la probabilité seroit la même, comme il est évident : ainsi, étant donné un hazard dont la probabilité est $\frac{n}{m}$, si on a ou si on produit en même temps un nombre N d'actes ou mouvements pareils à celui dont ce hazard dépend ; la probabilité d'avoir ce hazard M fois juste, est

$\frac{N.....\overline{N-M+1}}{1.2.....M}.\frac{n^M}{m^N}.\overline{m-n}^{\overline{N-M}}$ (CXIII.);

M fois au moins, est

$$1-\left(1-\frac{n}{m}\right)^N\left\{1+N.\frac{n}{m-n}+\frac{N.\overline{N-1}}{1.2}.\left(\frac{n}{m-n}\right)^2+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{N.\overline{N-1}\ldots\ldots\overline{N-M+2}}{1.2\ldots\ldots\overline{M-1}}.\left(\frac{n}{m-1}\right)^{\overline{M-1}}\right\}\text{(CXVII.)};$$

M fois au plus, eſt

$$\left(1-\frac{n}{m}\right)^N\left\{1+N.\frac{n}{m-n}+\frac{N.\overline{N-1}}{1.2}.\left(\frac{n}{m-n}\right)^2+\ldots.\right.$$
$$\left.+\frac{N.\overline{N-1}\ldots\ldots\overline{N-M+1}}{1.2\ldots\ldots M}.\left(\frac{n}{m-n}\right)^M\right\}\text{(CXV.)};$$

Une fois au moins, eſt $1-\left(1-\frac{n}{m}\right)^N$;

Une fois au plus, eſt $\left(1-\frac{n}{m}\right)^N\left(1+N\frac{n}{m-n}\right)$;

Une fois juſte, eſt $\frac{N}{1}\cdot.\frac{\overline{m-n}^{\overline{N-1}}.n}{m^N}$;

Étant donné 2 hazards dont les probabilités ſont $\frac{n}{m}$, $\frac{p}{m}$, & le nombre des chances qui donnent les 2 hazards à la fois φ; ſi l'on a ou ſi l'on produit en même temps un nombre N d'actes ou de mouvements pareils à celui dont ces 2 hazards dépendent:

La probabilité d'avoir ces deux hazards

le 1er. M fois juſte, & le 2e. P fois juſte, eſt l'expreſſion générale trouvée au §. CXXII.

Les probabilités d'avoir ces 2 hazards

le 1er. M fois $\left(\begin{matrix}\text{au plus}\\ \text{au moins}\end{matrix}\right)$ & le 2e. P fois juſte, ſeront les formules A & B (CXXIV.):

le 2e. P fois $\left(\begin{matrix}\text{au plus}\\ \text{au moins}\end{matrix}\right)$ & le 1er. M fois juſte, ſeront les formules C & D (ibid.).

le 1er. *M* fois au plus & le 2^e. *P* fois (au plus / au moins), ſeront les formules *E* & *F*:

le 1er. *M* fois au moins & le 2e. *P* fois (au plus / au moins), ſeront les formules *G* & *H*:

au moins une fois chacun, ſera la formule $\frac{m^N - \overline{m-n}^N \overline{m-p}^N + \overline{m-n-p+\varphi}^N}{m^N}$ (CXXV.).

Étant donnés autant de hazards qu'on voudra dont les probabilités ſont $\frac{n}{m}, \frac{p}{m}, \frac{q}{m}, \frac{r}{m}$ ....., & o le nombre des chances qui donnent pluſieurs de ces hazards à la fois : ſi l'on produit en même temps un nombre *N* d'actes ou mouvements pareils à celui dont tous ces hazards dépendent : la probabilité d'avoir *M* fois juſte le 1er. hazard, *P* fois le 2e, *Q* fois le 3e, *R* fois le 4e,.... ſera la formule générale trouvée au §. CXI : ainſi, ſi je jette à la fois ſur une table 20 dés à jouer ordinaires; la probabilité d'amener 3 as, 5 deux, 2 trois, 4 quatre, 5 cinq & 1 ſix, eſt $\frac{56581525}{3526387384 32}$; (CXII.).

Si huit perſonnes jettent en même temps ſur une table, chacune 2 dés à jouer ordinaires, la probabilité que deux de ces perſonnes ſeulement ameneront le point 5 & 4, que deux ſeulement ameneront 3 & 2, qu'une ſeule amenera ſonnet, & qu'une ſeule amenera Quine, eſt $\frac{875}{34012224}$. (Ibid.).

Digitized by Google

CHAPITRE V.

De l'Évaluation des Probabilités par l'Analyſe des Queſtions propoſées.

§. CXXXII.

LA VARIÉTÉ infinie des queſtions qui peuvent être propoſées ſur les probabilités, ne permet pas d'aſſigner une regle univerſelle au moyen de laquelle on puiſſe évaluer exactement toutes les probabilités qu'on deſireroit de connoître : nous avons néanmoins établi dans les chapitres précédents des principes de la plus grande généralité, au moyen deſquels on réſoudra facilement une infinité de queſtions de cette eſpece, & ſpécialement la plupart de celles qui ont rapport aux jeux de hazard uſités : nous avons eu ſoin auſſi d'éclaircir ces principes par des exemples qui en montrent l'application : l'objet de ce chapitre eſt de familiariſer de plus en plus le lecteur avec l'uſage de ces principes, & de montrer, par la ſolution de quelques queſtions particulieres, comment on peut évaluer exactement les probabilités au moyen de l'analyſe & de la Géométrie, lorſque ces queſtions en ſont ſuſceptibles.

CXXXIII.

QUESTION 1re. Je joue au Wisk, & je donne : on demande quelle eſt la probabilité que mon jeu ſera compoſé des 13 cartes de la couleur de la tourne ; ou ce qui eſt de même, que j'aurai à moi ſeul tous les atouts.

Digitized by Google

SOLUT. 1°. Pour avoir le numérateur de la probabilité cherchée : j'obſerve qu'en ſuppoſant que j'ai en main les 13 atouts, les 39 autres cartes peuvent être partagées entre les trois autres joueurs de $\frac{39.....27}{1.2.....13} \cdot \frac{26.....14}{1.2.....13}$ manieres (XLV.) : donc ce nombre eſt le numérateur cherché.

2°. Pour avoir le dénominateur : j'obſerve que le nombre de manieres dont les 52 cartes du jeu peuvent être partagées en 4 parts égales aux quatre joueurs, eſt $\frac{52.....40}{1.2.....13} \cdot \frac{39.....27}{1.2.....13} \cdot \frac{26.....14}{1.2.....13}$; qui eſt le dénominateur dont s'agit ; donc la probabilité cherchée eſt $\frac{1.2.....13}{52.....40} = \frac{1}{635013559600}$.

CXXXIV.

QUESTION 2e. Je vais jouer au piquet contre Pierre : on demande quelle eſt la probabilité que j'aurai d'emblée les 4 tierces majors ſans écarter ni reprendre.

SOLUT. Pour avoir le numérateur de la probabilité cherchée ; j'obſerve qu'en ſuppoſant que les 4 tierces majors m'arrivent en effet, les 20 cartes reſtantes peuvent être partagées entre Pierre & le talon, c'eſt-à-dire, en 2 parts, l'une de 12, l'autre de 8 cartes, de $\frac{20.....13}{1.2.....8}$ manieres : donc ce nombre eſt le numérateur cherché. Le dénominateur eſt le nombre de manieres dont 32 cartes peuvent être diſtribuées en 3 parts, deux de 12 & une de 8 cartes ; c. à d. $\frac{32.....21}{1.2.....12} \cdot \frac{20.....13}{1.2.....8}$ (XLIII.) ; donc la probabilité cherchée eſt $\frac{1.2.....12}{32.....21} = \frac{1}{225792840}$.

CXXXV.

QUESTION 3e. Je donne les 4 tierces majors à Pierre contre qui je joue au piquet ; & pour faire mon

mon jeu, je prends au hazard 12 cartes dans les 20 qui reſtent : on demande quelle eſt la probabilité qu'il me viendra d'emblée de quoi faire Pierre repic avant d'écarter ni reprendre.

SOLUTION. J'obſerve 1°. que je ne puis faire Pierre repic qu'au moyen de deux quintes baſſes : or dans les 20 cartes qui reſtent, le jeu de Pierre prélevé, il ſe trouve 4 quintes baſſes, & je puis avoir 2 de ces quintes baſſes de $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}$ ou 6 manieres différentes, parce qu'il y a $\frac{4 \ldots\ldots \overline{4-2+1}}{1 \cdot 2}$ manieres différentes de prendre 2 ſur 4 (XLII.). Mais de quelque maniere que j'aie les 2 quintes baſſes qu'il me faut, il reſte 10 cartes ſur leſquelles il en faut 2 pour completter mon jeu : or on peut prendre 2 ſur 10 de $\frac{10 \ldots\ldots \overline{10-2+1}}{1 \cdot 2}$ ou 45 manieres : donc 6. 45 eſt le numérateur de la probabilité cherchée.

2°. Le dénominateur eſt le nombre de manieres dont on peut prendre 12 ſur 20, c'eſt-à-dire, $\frac{20 \ldots\ldots 9}{1.2 \ldots 12}$: donc la probabilité cherchée eſt $6 \cdot 45 : \frac{20 \ldots\ldots 9}{1.2 \ldots\ldots 12} = \frac{9}{4199}$.

CXXXVI.

QUESTION 4e. Je joue contre Pierre au jeu nommé la Triomphe ; nous tenons chacun notre jeu en main, & c'eſt un cœur qui tourne ; j'ai deux cœurs dans mon jeu : on demande quelle eſt pour moi la probabilité que Pierre a au moins 3 cœurs dans ſon jeu.

SOLUT. 1°. Pour avoir le numérateur de la probabilité demandée : j'obſerve que dans la totalité des cartes il ſe trouve 8 cœurs, & que ſur ces 8 cœurs il s'en trouve 2 dans mon jeu & un qui tourne ; il n'y a donc que 5 cœurs qui puiſſent ſe trouver dans

Digitized by Google

le jeu de Pierre: or pour ſavoir de combien de manieres Pierre peut avoir dans ſon jeu 3 au moins de ces 5 cœurs, la queſtion peut s'énoncer ainſi: ſur 26 cartes différentes j'en diſtingue 5, & l'on en tire 5; de combien de manieres entre les 5 cartes tirées, peut-il s'en trouver 3 au moins d'entre les 5 que j'ai diſtinguées? pour réſoudre cette queſtion, dans le numérateur de la formule générale du §. LV. je fais $m=26, n=5, p=5, r=3$; & elle devient $1+5.21+\frac{5.4}{1.2}.\frac{21.20}{1.2}=2206$ qui ſera le numérateur de la probabilité demandée.

2°. Pour avoir le dénominateur, j'obſerve que le jeu de Pierre ne peut être pris que dans les 26 cartes que je ne connois point, car ni les cinq qui compoſent mon jeu ni la tourne ne peuvent en faire partie: la queſtion ſe réduit donc à ſavoir de combien de manieres on peut prendre 5 cartes ſur 26; or ce nombre de manieres eſt $\frac{26 \ldots\ldots 26-5+1}{1.2 \ldots\ldots 5}=65780$ qui ſera le dénominateur cherché. Donc la probabilité demandée eſt $\frac{2206}{65780}=\frac{1103}{32890}$.

CXXXVII.

QUESTION 5e. Je joue au Wisk contre Pierre, Jacques & Jean, nous tenons chacun notre jeu en main, j'ai 4 cœurs dans mon jeu dont l'un eſt la tourne: on demande quelle eſt pour moi la probabilité que Pierre a dans ſon jeu 4 cœurs & Jacques 3 cœurs.

SOLUT. 1°. Pour ſavoir de combien de manieres le hazard déſigné peut avoir lieu, ou ce qui eſt de même, pour avoir le numérateur de la probabilité demandée, il s'agit de ſavoir d'abord de combien de manieres les 9 cœurs qui ne ſont pas dans mon jeu peuvent être diſtribués en 3 parts, l'une

Digitized by Google

de 4 pour Pierre, la seconde de 3 pour Jacques, & par conséquent la troisieme de 2 pour Jean. Or, pour avoir ce nombre de manieres, il faut dans la formule générale $\frac{m....\overline{m-p+1}}{1.2.....p} \cdot \frac{\overline{m-p}.....\overline{m-p-p'+1}}{1.2.....p'}$ (XLIII.) faire $m=9$, $p=4$, $p'=3$, & elle devient $\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} \cdot \frac{5.4.3}{1.2.3}$. Mais à chacune de ces manieres, les 30 cartes restantes doivent être distribuées en 3 parts, l'une de 9 cartes pour Pierre, la 2e. de 10 cartes pour Jacques, la 3e. de 11 cartes pour Jean, ce qui peut se faire de $\frac{30.....22}{1.2.....9} \cdot \frac{21.....12}{1.2.....10}$ manieres; donc le numérateur de la probabilité cherchée est $\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} \cdot \frac{5.4.3}{1.2.3} \cdot \frac{30.....22}{1.2.....9} \cdot \frac{21.....12}{1.2.....10}$.

2°. Le dénominateur est le nombre de manieres dont les 39 cartes qui ne sont pas dans mon jeu peuvent être distribuées en 3 parts égales entre Pierre Jacques & Jean: or le nombre de manieres dont 39 cartes peuvent être partagées en 3 parties égales, est $\frac{39.....27}{1.2.....13} \cdot \frac{26.....14}{1.2.....13}$; & à chacune de ces manieres les 3 parts peuvent être réparties entre Pierre Jacques & Jean de 1.2.3 ou 6 manieres (LXIV); car Pierre ayant la $\left\{\begin{matrix}1^{e.}\\2^{e.}\\3^{e.}\end{matrix}\right.$ part, Jacques peut avoir la $\left\{\begin{matrix}\binom{2^{e.}}{3^{e.}}\\\binom{1^{e.}}{3^{e.}}\\\binom{1^{e.}}{2^{e.}}\end{matrix}\right.$ & Jean la $\left\{\begin{matrix}\binom{3^{e.}}{2^{e.}}\\\binom{3^{e.}}{1^{e.}}\\\binom{2^{e.}}{1^{e.}}\end{matrix}\right\}$: donc le dénominateur de la probabilité cherchée est $6 \cdot \frac{39.....27}{1.2.....13} \cdot \frac{26.....14}{1.2.....13}$. donc cette probabilité est

$\frac{9.....6}{1.....4} \cdot \frac{5.....3}{1.....3} \cdot \frac{30...22}{1.....9} \cdot \frac{21...12}{1...10} : 6 \cdot \frac{39.....27}{1.....13} \cdot \frac{26.....14}{1.....13} = \frac{9295}{740962}$.

CXXXVIII.

QUESTION 6e. Je prends un des 90 numéros de la Lotterie royale de France par extrait ſimple, ou bien 2 numéros par ambe ſimple, ou bien 3 par terne, ou 4 par quaterne, ou 5 par quine, ou 1 par extrait déterminé, ou 2 par ambe déterminé: on demande 1°. quelle eſt dans chacun de ces cas la probabilité que tous mes numéros arrivent dans le prochain tirage; 2°. combien de fois la Lotterie devroit me rendre équitablement ma miſe en cas que mes numéros arrivent; 3°. quelle eſt pour chacun de ces cas l'avantage que la Lotterie a ſur moi dans ſes conditions actuelles.

SOLUT. En premier lieu : dans la formule générale du §. LI. Je fais $m = 90$, $p = 5$; & je ſubſtitue ſucceſſivement à r, les nombres 1, 2, 3, 4 & 5; par quoi cette formule devient

Pour le 1er. cas, $\frac{89.....86}{1.2.3.4} \cdot \frac{1.2.3.4.5}{90.....86} = \frac{1}{18}$,

Pour le 2e. cas, $\frac{88.87.86}{1.2.3} \cdot \frac{1.2.3.4.5}{90.....86} = \frac{2}{801}$,

Pour le 3e. cas, $\frac{87.86}{1.2} \cdot \frac{1.2.3.4.5}{90.....86} = \frac{1}{11748}$,

Pour le 4e. cas, $86 \cdot \frac{1.2.3.4.5}{90.....86} = \frac{1}{511038}$,

Pour le 5e. cas, $\frac{1.2.3.4.5}{90.....86} = \frac{1}{43949268}$,

ce qu'il falloit 1°. trouver.

En ſecond lieu : ſi je parie 1 pour un événement dont la probabilité eſt $\frac{n}{m}$; pour que le pari ſoit équitable, il faut que la miſe de celui qui parie contre moi que cet événement n'aura pas lieu ſoit

Digitized by Google

$\frac{m-n}{n}$ (XVIII.); donc représentant par 1 la mise que je fais à la lotterie dans chacun des 5 cas ci-dessus dits, & par $\frac{n}{m}$ la probabilité que mes numéros arriveront : $\frac{m-n}{n}+1$ ou $\frac{m}{n}$ représentera ce que la Lotterie devroit équitablement me payer lorsque tous mes numéros arrivent. Je dis $\frac{m-n}{n}+1$ & non pas seulement $\frac{m-n}{n}$; parce que j'ai commencé par confier ma mise 1 en m'intéressant à la Lotterie; ainsi elle devroit avant tout compte m'être remise quand je gagne le pari : donc en supposant que tous mes numéros arrivent, la Lotterie devroit équitablement me remettre

Au 1er. cas, 18
Au 2e. cas, $400+\frac{1}{2}$
Au 3e. cas, 11748
Au 4e. cas, 511038
Au 5e. cas, 43949268
} fois ma mise 1,

ce qu'il falloit 2o. trouver.

En 3e. lieu : pour connoître l'avantage de la Lotterie en chacun des cinq cas ci-dessus dits, il faut, de ce qu'elle devroit me payer équitablement au cas où mes numéros arrivent, retrancher ce qu'elle me paye effectivement : & j'aurai

Au 1er. cas, $18-15 = 3$,
Au 2e. cas, $400+\frac{1}{2}-270=130+\frac{1}{2}$,
Au 3e. cas, $11748-5200=6548$,
Au 4e. cas, $511038-70000=441038$,
Au 5e. cas, $43949268-1000000=42949268$:

d'où l'on voit que la Lotterie est avantagée dans chacun de ces cas d'une partie déterminée de ce qui

Digitized by Google

devroit équitablement m'advenir en cas de gain ; ſav. au 1er. cas, de $\frac{3}{18}$ ou $\frac{1}{6}$; au 2e. cas, de $\frac{130+\frac{1}{2}}{400+\frac{1}{2}}$ ou $\frac{29}{89}$; au 3e. cas, de $\frac{6548}{11748}$ ou $\frac{1637}{2937}$; au 4e. cas, de $\frac{441038}{511038}$ ou $\frac{220519}{255519}$; au 5e. cas, de $\frac{42949268}{43949268}$ ou $\frac{10737317}{10987317}$. ce qui reſtoit à trouver pour les 5 premiers cas.

A l'égard du 6e. & du 7e. cas, pour avoir la probabilité que $\left(\begin{matrix}\text{le numéro}\\ \text{les 2 numéros}\end{matrix}\right)$ que j'ai pris $\left(\begin{matrix}\text{arrivera}\\ \text{arriveront chacun}\end{matrix}\right)$ à la place du tirage qui lui a été aſſignée : dans la formule générale du §. XCV. je fais $m=90$, $p=5$, $n=r=\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$; & elle ſe réduit à $\left\{\begin{matrix}\frac{89.....86}{90.....86}=\frac{1}{90}\\ \frac{88.....86}{90.....86}=\frac{1}{8010}\end{matrix}\right.$ qui eſt la probabilité cherchée : donc ce que la Lotterie devroit équitablement me payer en cas de gain, eſt $\left\{\begin{matrix}90\\8010\end{matrix}\right.$ fois ma miſe 1 ; ainſi l'avantage de la Lotterie dans ce cas eſt $\left\{\begin{matrix}\frac{90-70}{90}=\frac{2}{9}.\\ \frac{8010-4900}{8010}=\frac{311}{801}.\end{matrix}\right.$ ce qui reſtoit à trouver.

Je crois inutile d'avertir ici le Lecteur que l'équité dont il vient d'être parlé eſt purement numérique, & ne préjudicie aucunement à l'équité légitime qui peut ſe trouver dans les avantages de la Lotterie relativement à la liberté que les actionnaires ont de s'y intéreſſer, aux frais indiſpenſables de ſon adminiſtration, ainſi qu'aux objets utiles & louables auxquels ces avantages ſont affectés.

Digitized by Google

CXXXIX.

QUESTION 7e. Sur un plan horizontal & quarré *ABED* dans lequel eſt inſcrit un cercle *HGFI* (Fig. 1e.) je fais rouler une boule au hazard; on demande quelle eſt la probabilité que la boule ceſſant de ſe mouvoir s'arrêtera dans le cercle.

SOLUT. Nommant $\frac{n}{m}$ la probabilité cherchée: 1°. la ſomme des points du quarré *ABCD*, ou ce qui eſt de même, la ſurface de ce quarré exprime le nombre total des chances : donc $m = AB^2$, & nommant r le rayon CF du cercle inſcrit, on a $m = 4r^2$.

2°. La ſomme des points de la ſurface du cercle inſcrit, ou ce qui eſt de même, la ſurface du cercle inſcrit exprime le nombre des chances qui donnent le hazard dont on cherche la probabilité : donc $n =$ circonfér. $HGFI \times \frac{CF}{2}$; & nommant $\mathcal{C}$ le rapport de la circonférence au diametre; circonf. $\frac{HGFI}{2CF} = \mathcal{C}$; donc circonférence $HGFI = \mathcal{C} \cdot 2CF$; donc $n = \mathcal{C} \cdot CF^2 = \mathcal{C} \cdot r^2$; donc la probabilité cherchée $\frac{n}{m} = \frac{\mathcal{C}r^2}{4r^2} = \frac{\mathcal{C}}{4}$; *C.Q.F.T.*

CXL.

QUESTION 8e. Sur un plan horizontal & quarré *ABED* (Fig. 2.) dans lequel eſt inſcrit un octogone régulier *abcdefgh*, on fait rouler une boule au hazard juſqu'à ce qu'elle s'arrête; & l'on recommence la même choſe quatre fois de ſuite : on demande quelle eſt la probabilité que la boule s'arrêtera au moins une fois hors de l'octogone.

Digitized by Google

Solut. Nommant t le côté du quarré, u le côté de l'octogone : j'ai $ah = \sqrt{\overline{Aa}^2 + \overline{Ah}^2}$; donc ab, $u = Aa\sqrt{2}$: Mais $AB = Aa + ab + bB = 2Aa + ab$; donc $t = 2Aa + u$; donc $Aa = \frac{t-u}{2}$; donc $u = \frac{t-u}{\sqrt{2}}$; ou bien $u = \frac{t}{\sqrt{2}+1}$.

Or la surface du quarré $ABED$ est t^2 ; & la surface de l'octogone est le périmetre $abcdefgh \times \frac{CF}{2} = 8u \cdot \frac{t}{4} = 2tu = \frac{2t^2}{\sqrt{2}+1}$: donc la surface du quarré moins celle de l'octogone, est $t^2 \cdot \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{2}+1} \right\} = t^2 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, ce qui seroit dans le cas d'une seule épreuve le numérateur de la probabilité cherchée dont t^2 seroit le dénominateur ; donc dans le cas d'une seule épreuve, la probabilité cherchée seroit $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; mais dans l'hypothese il y a quatre épreuves ; donc la probabilité cherchée est (CIII.)

$$1 - \left\{ 1 - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right\}^4 = \frac{1 + 12\sqrt{2}}{17 + 12\sqrt{2}}.$$

CXLI.

Question 9e. Sur un plan circulaire horizontal $AFBKDG$ (Fig. 3e.) dont le diametre est AK ($2r$) & dans lequel sont inscrits un triangle équilatéral ABD, & un quarré $HFGI$, dont les bases BD & HI sont paralleles entr'elles & perpendiculaires au diametre AK ; on fait rouler une boule jusqu'à ce que son mouvement soit anéanti, & on recommence 8 fois de suite la même chose : on demande quelle est la probabilité que dans ces 8 épreuves la boule s'arrêtera au moins une fois dans le triangle, & au moins une fois dans le quarré.

Digitized by Google

Solut. Nommant $\frac{n}{m}$ la probabilité que la boule s'arrêtera dans le triangle, & $\frac{p}{m}$ la probabilité que la boule s'arrêtera dans le quarré, dans le cas d'une seule épreuve; φ étant le nombre des chances qui donnent les 2 hazards à la fois:

$\frac{m^8 - \overline{m-n}^8 - \overline{m-p}^8 + \overline{m-n-p+\varphi}^8}{m^8}$ sera la probabilité cherchée (CXXV.).

Mais m est la surface du cercle $AFBKDG$; n est la surface du triangle ABD; p est la surface du quarré $HFGI$; & φ qui est celle de l'exagone irrégulier $OQRTSP = n - BR.QR - ON.AN$; cela posé:

1°. $m = \zeta r^2$ (ζ exprimant le rapport de la circonférence au diametre.).

2°. $n = BM.AM = \sqrt{\overline{BK}^2 - \overline{MK}^2}.AM$
$= \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} \cdot \frac{3r}{2} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{4} \cdot r^2$.

3°. $KL.LA = \overline{HL}^2$; donc $KL.\overline{LN+NA} = \overline{HL}^2$, ou bien $KL.\overline{HI+KL} = \frac{\overline{HI}^2}{4}$; d'où l'on tire $KL = \frac{HI}{2} \cdot (\sqrt{2}-1) = \frac{\sqrt{p}}{2}(\sqrt{2}-1)$.

Mais $KL = AK - LA = 2r - NL - AN = 2r - \sqrt{p} - KL$; donc $2KL$ ou $\sqrt{p}(\sqrt{2}-1) = 2r - \sqrt{p}$; donc $p = 2r^2$.

4°. $BR = MB - HL = \frac{\sqrt{3}}{2}r - \frac{\sqrt{p}}{2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} \cdot r$; de plus $BR, \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}r :: QR :: MB, \frac{\sqrt{3}}{2} . r : AM, \frac{3r}{2}$; donc $QR = \frac{3-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2} . r$; donc $BR.QR = \frac{5\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{4} \cdot r^2$. D'ailleurs AN ou KL ou $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} r$:

$ON :: AM, \frac{3r}{2} : BM. \frac{\sqrt{3}}{2}r$; donc $ON = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}.\sqrt{3}}r$;

donc $ON.AN = \frac{3-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}r^2$; donc $\phi = \frac{3\sqrt{3}}{4}.r^2$

$-\frac{5\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{4}r^2 - \frac{3-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}r^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right)r^2$;

donc la probabilité cherchée eſt

$$\frac{C - (C - \frac{3\sqrt{3}}{4})^8 - (C-2)^8 + (C - 2 - 7\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^8}{C^8};$$

C. Q. F. T.

CXLII.

QUESTION 10e. Sur un plan horizontal carrelé de carreaux réguliers égaux je jette en l'air un écu; on demande quelles ſont les probabilités que l'écu après ſa chûte ſe trouvera poſé ſur un ſeul ou ſur pluſieurs de ces carreaux.

SOLUT. Les carreaux étant par l'hypotheſe des polygones réguliers égaux, ſont néceſſairement ou des triangles équilatéraux, ou des quarrés, ou des éxagones réguliers égaux : 1°. pour trouver la probabilité que l'écu après ſa chûte ſe trouvera ſur un ſeul carreau : j'inſcris dans un des carreaux

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{triangle } ABC & 4 \\ \text{quarré } ABCD & 5 \\ \text{éxagone } ABCDEF & 6 \end{array}\right\}, \quad (\text{Figure})$$

une figure ſemblable $\left\{\begin{array}{l} abc \\ abcd \\ abcdef \end{array}\right.$ éloignée des côtés du carreau de la longueur Gg du rayon de l'écu : il eſt clair que ſi le centre de l'écu ſe trouve ſur la ſurface du polygone intérieur, l'écu ſe trouvera tout entier ſur le carreau; & que ſi le centre de l'écu ſe trouve hors de ce polygone intérieur,

Digitized by Google

l'écu ſe trouvera au moins en partie hors du carreau : ainſi la ſurface $\left\{\begin{matrix} ABC \\ ABCD \\ ABCDFF \end{matrix}\right.$ eſt le nombre total des chances ; & la ſurface $\left\{\begin{matrix} a\,b\,c \\ a\,b\,c\,d \\ a\,b\,c\,d\,e\,f \end{matrix}\right.$ eſt le nombre des chances qui donnent le hazard dont on cherche la probabilité : ainſi la probabilité P que l'écu après ſa chûte ſe trouvera tout entier ſur le $\left\{\begin{matrix} \text{triangle} \\ \text{quarré} \\ \text{exagone} \end{matrix}\right.$, eſt $\left\{\begin{matrix} \frac{\text{ſurf. } a\,b\,c}{\text{ſurf. } A\,B\,C} \\ \frac{\text{ſurf. } a\,b\,c\,d}{\text{ſurf. } A\,B\,C\,D} \\ \frac{\text{ſurf. } a\,b\,c\,d\,e\,f}{\text{ſurf. } A\,B\,C\,D\,E\,F} \end{matrix}\right.$.

Nommant k le côté du carreau, r le rayon de l'écu ; & O étant le centre du polygone : on a ſurf. $ABC=\frac{k.BG}{2}$; $BG=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AG}^2}=\frac{k.\sqrt{3}}{2}$; donc ſurf. $ABC=\frac{k^2.\sqrt{3}}{4}$: de même ſurf. $abc=\frac{\overline{bc}^2.\sqrt{3}}{4}$; mais $AB, k : bc :: OG, \frac{BG}{3}, \frac{k.\sqrt{3}}{6}$: $Og, OG-Gg, \frac{k.\sqrt{3}}{6}-r$; donc $bc=k-2r.\sqrt{3}$; donc pour le triangle $P=\frac{k^2-4\sqrt{3}.kr+12r^2}{k^2}$.

Dans le quarré $AB, k : OG, \frac{k}{2} :: ab : Og$, $OG-Gg, \frac{k}{2}-r$; donc $ab=\frac{k^2-2kr}{k}=k-2r$, donc $P=\frac{\overline{ab}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{k^2-4kr+4r^2}{k^2}$.

Digitized by Google

Dans l'éxagone : $\overline{AO}^2 - \overline{AG}^2 = k^2 - \frac{k^2}{4} = \frac{3k^2}{4}$; donc $OG = \frac{k\sqrt{3}}{2}$; de plus $AB, k : ab :: OG, \frac{k.\sqrt{3}}{2} : Og, OG - Gg, \frac{k.\sqrt{3}}{2} - r$; donc $ab = \frac{k\sqrt{3} - 2r}{\sqrt{3}}$; donc $P = \frac{\text{surf. } abcdef}{\text{surf. } ABCDEF} = \frac{ab.Og}{AB.OG} = \frac{3k^2 - 4kr\sqrt{3} + 4r^2}{3k^2}$.

Si on fait $\frac{1}{2} = \begin{cases} (k^2 = 4kr\sqrt{3} + 12r^2) : k^2 \\ (k^2 - 4kr + 4r^2) : \quad k^2 \text{ ; on en} \\ (3k^2 - 4kr\sqrt{3} + 4r^2) : 3k^2 \end{cases}$

déduit $\frac{k}{r} = \begin{cases} 2\sqrt{3} \cdot (2 + \sqrt{2}) \\ 2 \cdot (2 + \sqrt{2}) \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (2 + \sqrt{2}) \end{cases}$; ce qui exprime, pour le triangle, le quarré & l'exagone, le rapport qui doit se trouver entre le côté du polygone & le rayon de l'écu, pour pouvoir parier équitablement, à mises égales, que l'écu après sa chûte se trouvera tout entier sur un seul carreau.

Pour avoir la probabilité que l'écu se trouvera sur 2 ou un plus grand nombre de carreaux, j'observe que ce hazard aura lieu, quelque part que le centre de l'écu soit placé entre les périmetres $\begin{cases} ABC \text{ \& } abc \\ ABCD \text{ \& } abcd \\ ABCDEF \text{ \& } abcdef \end{cases}$; donc le nombre des chances qui donnent ce hazard est exprimé par les surfaces qu'entourent ces périmetres, c'est-à-dire,

Digitized by Google

par $\left\{\begin{array}{ll} 3kr - 3\sqrt{3}\,.\,r^2, & \text{dans le triangle} \\ 4kr - 4r^2 & \text{dans le quarré} \\ 6kr - 2\sqrt{3}\,.\,r^2 & \text{dans l'éxagone} \end{array}\right\}$; d'où

l'on tire $P = \left\{\begin{array}{l} (4kr.\sqrt{3} - 12r^2) : k^2 \\ (4kr \quad - \quad 4r^2) : k^2 \\ (4kr.\sqrt{3} - 4r^2) : 3k^2 \end{array}\right\}$;

& égalant ces probabilités à $\frac{1}{2}$, on en déduit

comme ci-deſſus, $\frac{k}{r} = \left\{\begin{array}{l} 2\sqrt{3}\,.\,(2+\sqrt{2}) \\ 2\,.\,(2+\sqrt{2}) \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\,.\,(2+\sqrt{2}) \end{array}\right\}$.

3°. Pour avoir la probabilité que l'écu, après ſa chûte, ſe trouvera ſur 3 carreaux au moins : de la pointe de chaque angle des figures intérieures, je prolonge les côtés de ces figures juſqu'à leur rencontre avec le périmetre du carreau : la ſomme des parallélogrammes *A M a m* qui en naîtront ſera celle des points où le centre de l'écu doit être placé pour que l'écu ſoit ſur plus de 2 carreaux ; ainſi la ſomme de ces parallélogrammes, c'eſt-à-dire $2\sqrt{3}\,.\,r^2$ pour le triangle, $4r^2$ pour le quarré, $4\sqrt{3}\,.\,r^2$ pour l'éxagone, exprimera le nombre des chances qui donnent le hazard dont il s'agit : diviſant cette quantité par la ſurface du carreau qui exprime le nombre total des chances, on aura la probabilité cherchée qui eſt $8r^2 : k^2$ pour le triangle, $4.r^2 : k^2$ pour le quarré, $8r^2 : 3k^2$ pour l'exagone ; & égalant ces probabilités à $\frac{1}{2}$; on tire $\frac{k}{r} = 4$, $2\sqrt{2}$, & $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Digitized by Google

4°. La probabilité que l'écu après ſa chûte ſe trouvera ſur deux carreaux ſans plus, ſe connoîtra en obſervant que ce hazard a lieu quand le centre de l'écu ſe trouve entre les périmetres du carreau & de la figure intérieure, & hors des parallélogrammes $AMam$, & diviſant ces parties de ſurfaces par celle du carreau, & on aura pour cette probabilité $(4\sqrt{3}\cdot kr - 20r^2) : k^2$ dans le triangle, $(4kr - 8r^2) : k^2$ pour le quarré, & $(4kr - 4\sqrt{3}\cdot r^2) : \sqrt{3}\cdot k^2$ pour l'exagone: & égalant ces probabilités à $\frac{1}{2}$; on a pour le pari équitable à miſes égales, $\frac{k}{r} = \frac{20}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ pour le triangle, 4 pour le quarré, & $\frac{2}{\sqrt{3}}(2+\sqrt{-2})$ pour l'exagone: d'où l'on voit que ſi les carreaux ſont des exagones réguliers, le pari ne peut ſe faire équitablement à miſes égales, à cauſe de la quantité imaginaire $\sqrt{-2}$.

5°. Pour avoir la probabilité que l'écu après ſa chûte ſe trouvera ſur 6 carreaux triangulaires, ou ſur 4 quarrés, ou ſur 3 carreaux exagones: du ſommet d'un angle du carreau pour centre & du rayon Gg de l'écu, j'imagine un cercle qui coupe les côtés du carreau en deux points P & Q: les ſecteurs $3PCQ$, $4PDQ$, $6PFQ$, ou ce qui eſt de même, $\frac{Gr^2}{2}$, Gr^2, $2Gr^2$ (G étant le rapport de la circonférence au diametre) exprimeront pour le triangle, le quarré & l'exagone, le nombre des chances qui donnent le hazard dont s'agit: ainſi la probabilité P de ce hazard ſera $\frac{2Gr^2}{\sqrt{3}k^2}$, $\frac{G\cdot r^2}{k^2}$, & $\frac{4Gr^2}{3\sqrt{3}\cdot k^2}$; & ſi on fait $P = \frac{1}{2}$; on aura $\frac{k}{r} = \frac{2\sqrt{G}}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{2G}$ & $\frac{2\sqrt{2G}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$.

Digitized by Google

6°. Pour avoir la probabilité que l'écu après sa chûte se trouvera sur 3 carreaux & 2 joints sans plus : des parallélogrames $3AMam$, $4AMam$, $6AMam$ ou $2\sqrt{3}\cdot r^2$, $4\cdot r^2$, $4\sqrt{3}\cdot r^2$, je retranche les secteurs $3PCQ$, $4PDQ$, $6PFQ$, ou $\frac{6}{2}\cdot r^2$, $6\cdot r^2$, $2\,6\cdot r^2$; les restes $(2\sqrt{3}-\frac{6}{2})\cdot r^2$, $(4-6)\cdot r^2$, $2\cdot(2\cdot\sqrt{3}-6)\cdot r^2$ exprimeront pour le triangle, le quarré & l'exagone, le nombre des chances qui donnent le hazard dont s'agit : d'où l'on déduit $P=\frac{8\cdot\sqrt{3}-2\,6}{\sqrt{3}}\cdot\frac{r^2}{k^2}$, $(4-6)\cdot\frac{r^2}{k^2}$, $\frac{8\sqrt{3}-4\,6}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{r^2}{k^2}$; & égalant ces valeurs de P à $\frac{1}{2}$, on en déduit $\frac{k}{r}=\frac{2\cdot\sqrt{(4\sqrt{3}-6)}}{\sqrt[4]{3}}$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{(4-6)}$, & $\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{(2\sqrt{3}-6)}}{3^{\frac{3}{4}}}$.

La méthode dont on s'est servi pour résoudre cette 10e. question peut s'employer pour trouver la probabilité de toutes les positions que l'écu pourroit avoir sur des carreaux irréguliers égaux ou inégaux, tels que triangles rectangles, lozanges, parallellogrammes rectangles ou obliquangles, &c.

Cette question & la suivante sont extraites des œuvres de M. de Buffon, au traité qui a pour titre : *Essai d'Arithmétique morale.*

CXLIII.

QUESTION IIe. Sur un plancher composé de planches égales & parallelles, on jette en l'air une baguette; on demande quelle est la probabilité que

cette baguette après ſa chûte croiſera un des joints paralleles du plancher.

SOLUT. Soit *ABCD* (Fig. 7.) l'une des planches : entre les joints paralleles *AB* & *CD*, je tire deux autres paralleles *ab* & *ca* éloignées des premieres chacune de la demi-longueur de la baguette.

1°. Il eſt clair que ſi le milieu de la baguette ſe trouve dans l'eſpace *abcd*, la baguette ne peut, dans quelque ſituation qu'elle ſe trouve, croiſer *AB* ni *CD*.

2°. Si le milieu de la baguette ſe trouve dans l'eſpace *AB ab*; elle peut, ſelon ſa ſituation, croiſer ou ne pas croiſer le joint *AB*. Je mene une perpendiculaire *HL* entre les deux lignes *AB* & *ab*; d'un point quelconque *P* de cette ligne *HL* pris pour centre, & de la moitié de la longueur de la baguette pour rayon, je décris un cercle qui coupe la ligne *AB* aux points *G* & *g*, & le prolongement de *HL* en *M*. Cela poſé : je dis que le milieu de la baguette ſe trouvant au point *P*, ou dans la partie infiniment petite *Pp*; le nombre des poſitions poſſibles de la baguette dans leſquelles elle croiſe *AB*, eſt repréſenté par *Pp*. arc *GMg*, comme il eſt évident : & dans chaque petite partie *Pp* de la ligne *LH* où le milieu de la baguette peut ſe trouver, le nombre des poſitions où la baguette croiſe *AB* eſt repréſenté par le produit de ce *Pp* par ſon arc correſpondant *GMg*: nommant donc *dx* & *y* les variables correſpondantes *Pp* & *GMg*; *ydx* ſera le nombre des poſitions où la baguette croiſera *AB*, tandis que ſon milieu ſera dans une partie infiniment petite de la ligne *LH*: donc le nombre des poſitions où la baguette croiſera *AB* ſon milieu étant dans la ligne *LH*, eſt $\int y\,dx$; & comme il y a autant de lignes *LH* dans l'eſpace

l'eſpace $AB\,ab$ qu'il y a de points dans la ligne AB; $AB.\int y\,dx$ ſera le nombre des poſitions où la baguette croiſe AB, ſon milieu étant dans l'eſpace $AB\,ab$.

3°. Si le milieu de la baguette ſe trouve dans l'eſpace $CD\,cd$, on trouvera de même que le nombre des poſitions où la baguette croiſe CD, eſt $CD.\int y\,dx$; ou $AB.\int y\,dx$: donc le nombre des chances qui donnent le hazard dont il s'agit, eſt $2\,AB.\int y\,dx$.

4°. Le nombre de toutes les poſitions poſſibles de la baguette ſur la planche $ABCD$ eſt évidemment $AB.AC.c$ (c repréſentant la circonférence dont la baguette eſt le diametre :) donc la probabilité cherchée eſt $\frac{2\,AB.\int y\,dx}{AB.AC.c}=\frac{2\int y\,dx}{AC.c}$.

Pour avoir la ſurface repréſentée par $\int y\,dx$, je décris une cycloïde ordinaire $BDAdb$ (Fig. 8e.) dont le cercle générateur a pour diametre AE longueur de la baguette : par le milieu C de AE je mene une parallele DCd à la baſe BEb de la courbe qu'elle coupera en D & d; du même point C pour centre je décris le cercle générateur qui touche la cycloïde à ſon ſommet A, & ſa baſe à ſon milieu E, & qui coupe la droite Dd aux points M & m.

Je dis que l'aire $MD\,A\,d\,m$ terminé par la cycloïde, le cercle & la ligne Dd, eſt $=\int y\,dx$: car prenant ſur la ligne $AC=LH$, un point quelconque P; de ce point menant une double ordonnée RPR de la cycloïde parallélement à Bb, laquelle coupera le cercle en Q & Q, & menant la double ordonnée infiniment proche rpr qui coupe le cercle en q & q; le petit aire $R\,Q\,q\,r=QR.Pp$; mais par la nature de la cycloïde, chaque droite QR eſt égal à l'arc de cercle correſpondant QA; donc le petit aire $R\,Q\,q\,r=Pp.AQ$; donc

$\int QRrq = \int Pp \cdot AQ$, ou ce qui eſt de même, l'aire $2.QARQ = \int QAQ \cdot Pp = \int y\,dx$; donc l'aire $MDAmd$ = la fonction $\int y\,dx$ dans laquelle on fait $x = AC = LH$.

CXLIV.

Nous terminerons ce chapitre par une queſtion, dont la ſolution mettra le lecteur à portée d'apprécier la commune opinion où l'on eſt, que la multitude des épreuves d'un pari déſavantageux peut le rendre avantageux à la longue; de maniere que celui qui a perdu une fois un pari de cette eſpece, tente au riſque de ſa fortune, en le réitérant un certain nombre de fois, de regagner à la fin non-ſeulement ce qu'il aura perdu dans toutes les épreuves antérieures, mais même de gagner en ſus cequ'il vouloit gagner d'abord à la premiere épreuve.

CXLV.

Queſtion 12e. J'engage une miſe 1 au pari d'un événement dont la probabilité eſt $\frac{n}{m}$, contre Pierre qui parie une miſe F que cet événement n'aura pas lieu; avec les conditions, 1°. que ſi je perds le pari à une 1re. épreuve, nous le recommencerons à une 2e. épreuve; & que je parierai contre lui une miſe $\frac{F+1}{F}$ contre $1+F$ pour le même événement : 2°. que ſi je perds encore à la 2e. épreuve, je reparierai contre lui à une 3e. épreuve $\left(\frac{F+1}{F}\right)^2$ contre $1+\frac{F+1}{F}+F$ ou $\frac{\overline{F+1}^2}{F}$ pour le même événement : 3°. que ſi je perds encore à la 3e. épreuve, je reparierai contre lui à une 4e. épreuve $\left(\frac{F+1}{F}\right)^3$ contre $1+\frac{F+1}{F}+\frac{\overline{F+1}^2}{F}+F$

Digitized by Google

ou $\frac{\overline{F+1}^3}{F^2}$ pour le même événement : 4°. que si je perds encore à la 4°. épreuve, nous continuerons le pari suivant la même loi, & que Pierre tiendra la gageure, un nombre déterminé N d'épreuves ; de maniere que si je gagne avant la N^e ou à la N^e épreuve, il me restera de gain la quantité F ; & que si je perds à toutes les N épreuves, je payerai à Pierre la somme de toutes mes mises ; c'est-à-dire ;

$$1 + \frac{F+1}{F} + \left(\frac{F+1}{F}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{F+1}{F}\right)^{N-1},$$

ou $\frac{\overline{F+1}^N - F^N}{F^{N-1}}$: on demande si les conditions auxquelles j'ai la faculté de renouveller ainsi le pari pendant un nombre déterminé N d'épreuves, rendent ce pari plus ou moins avantageux pour moi, qu'il n'auroit été s'il n'y eût eu qu'une seule épreuve.

Solut. 1°. La probabilité que l'événement pour lequel je parie arrivera dans le cours des N épreuves, est $1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^N$ (CIII.).

2°. La probabilité qu'il n'arrivera pas, est $\left(1 - \frac{n}{m}\right)^N$ (CI.).

3°. La somme que je perdrai, s'il n'arrive pas, est $\frac{\overline{F+1}^N - F^N}{F^N - 1}$.

4°. La somme que je gagnerai s'il arrive, est F. Donc ce que je devrois gagner, si l'événement pour lequel je parie arrive, est le 4°. terme x de la proposition suivante $1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^N : \left(1 - \frac{n}{m}\right)^N :: \frac{\overline{F+1}^N - F^N}{F^{N-1}} : x = \frac{\left(\overline{F+1}^N - F^N\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{m}\right)^N}{F^{N-1} - F^{N-1} \cdot \left(1 - \frac{n}{m}\right)^N}$: d'où

l'on voit que l'avantage que j'ai dans ce pari, (s'il y en a) eſt le rapport de l'excès de ce que j'ai ſur ce que je dois équitablement avoir en cas de gain, à ce que je dois équitablement avoir; c'eſt-à-dire, $\left\{ F - \frac{(\overline{F+1}^N - F^N) \cdot (1 - \frac{n}{m})^N}{F^{N-1} - F^{N-1}(1 - \frac{n}{m})^N} \right\} :$

$$\frac{(\overline{F+1}^N - F^N) \cdot (1 - \frac{n}{m})^N}{F^{N-1} - F^{N-1} \cdot (1 - \frac{n}{m})^N}$$

$$= \frac{F^N - F^N \cdot (1 - \frac{n}{m})^N - \overline{F+1}^N \cdot (1 - \frac{n}{m})^N + F^N \cdot (1 - \frac{n}{m})^N}{(\overline{F+1}^N - F^N) \cdot (1 - \frac{n}{m})^N}$$

$$= \frac{F^N - \overline{F+1}^N \cdot (1 - \frac{n}{m})^N}{(\overline{F+1}^N - F^N) \cdot (1 - \frac{n}{m})^N}.$$

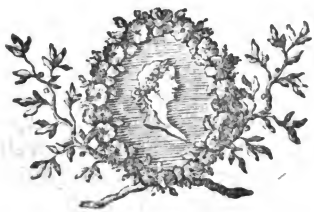
Mais cet avantage eſt poſitif, nul ou négatif, ſelon que $F^N \gtreqless \overline{F+1}^N \cdot (1 - \frac{n}{m})^N$, ou que $F \gtreqless \overline{F+1} \cdot (1 - \frac{n}{m})$, ou que $Fm \gtreqless Fm + m - Fn - n$, ou que $Fn \gtreqless m - n$; ou enfin que $F \gtreqless \frac{m-n}{n}$.

Ainſi le rapport de F à $\frac{m-n}{n}$ qui détermine l'avantage, l'équité ou le déſavantage du pari en une ſeule épreuve, le détermine encore dans un nombre quelconque N d'épreuves: avec cette différence, que lorſque le pari eſt équitable en une ſeule épreuve, il reſte toujours équitable, quelque ſoit le nombre des épreuves; au lieu que lorſque le pari eſt avantageux ou déſavantageux pour un des parieurs, cet avantage ou déſavantage croît dans un nombre don-

Digitized by Google

né N d'épreuves, ſuivant une fonction combineé des quantités F, $\frac{m}{n}$ & N.

D'où l'on voit que malgré l'augmentation de probabilité qu'un parieur acquiert par la multiplicité des épreuves; ſi le pari eſt déſavantageux pour lui à la premiere épreuve, il le devient beaucoup plus en la réitérant: parce que ſes miſes augmentent dans un plus grand rapport que les probabilités de l'événement qui peut le faire gagner.



Digitized by Google

CHAPITRE VI.

De l'Évaluation des Probabilités par les Expériences ou Observations.

§. CXLVI.

LES faits ou les propositions dont il nous est possible d'évaluer les probabilités par une analyse exacte, sont en très-petit nombre & d'une médiocre importance relativement à ceux à l'égard desquels on ne peut ni assigner un nombre total de chances également possibles, ni déterminer le nombre de celles d'entre ces chances qui donnent les hazards dont s'agit : à ce défaut on peut avoir recours aux observations & expériences, au moyen desquelles on trouvera à peu près la probabilité qu'il importe de connoître, non pas certainement, mais avec une espérance qui approchera fort de la certitude. En effet : il est d'expérience que dans une multitude d'épreuves d'un même acte, mouvement ou état de choses, le nombre des retours de chacun des hazards qui en dépendent est à-peu-près en proportion de la probabilité de ce hazard : de maniere, par exemple, que dans une multitude de jets de 2 dés à jouer ordinaires il vient à-peu-près cinq dés simples pour un doublet, chaque point simple revient à-peu-près le même nombre de fois que chacun des autres, il en est de même de chaque doublet, & ainsi des autres hazards; en sorte qu'en prenant pour dénominateur le nombre total des épreuves, & pour numérateur le nombre de fois

Digitized by Google

qu'un hazard ſera arrivé dans le cours de ces épreuves; il eſt preſque certain que la fraction approchera de la véritable probabilité de ce hazard.

Telle eſt la méthode que nous allons développer dans ce Chapitre, laquelle n'eſt pas ſeulement fondée ſur l'expérience, ni ſur une vague métaphyſique, mais qui eſt ſuſceptible d'une démonſtration rigoureuſe, ainſi qu'on le verra par les proportions ſuivantes.

CXLVII.

THÉORÊME. Si l'acte ou mouvement duquel dépend un hazard ſpécifié eſt réitéré un certain nombre N de fois, & ſi on nomme $\frac{n}{m}$ la probabilité de ce hazard; je dis que le nombre de fois que ce hazard doit le plus probablement arriver dans le cours des épreuves ſuppoſées, eſt le nombre entier intermédiaire entre les 2 fractions $\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}$ & $\overline{N+1}\,\frac{n}{m} - 1$; & que ſi ces 2 fractions ſont réductibles en nombres entiers, chacun de ces nombres eſt le nombre de fois que le hazard ſpécifié doit le plus probablement arriver.

DÉMONST. Nous avons vu (CXIII.) que $\frac{n}{m}$ étant la probabilité d'un événement, la probabilité que cet événement arrivera le nombre de fois x juſte en un nombre N d'épreuves, eſt $\frac{N\ldots\overline{N-x+1}}{1.2.3\ldots\ldots x} \cdot \frac{n^x}{m^N} \cdot \overline{m-n}^{N-x}$; donc le nombre de fois juſte que ce hazard doit le plus probablement arriver dans le cours des N épreuves ſuppoſées, eſt la valeur de x dans le cas où la fonction variable $\frac{N\ldots\overline{N-x+1}}{1.2.3\ldots\ldots x} \cdot \frac{n^x}{m^N} \cdot \overline{m-n}^{N-x}$ eſt à ſon état de

maximum ; c'eſt-à-dire, la plus grande poſſible : or, ſi dans cette fonction variable on ſubſtitue ſucceſſivement à x tous les nombres entiers depuis o juſqu'à N inclusivement ; cette fonction augmentera continuellement à chaque ſubſtitution juſqu'à un certain terme, paſſé lequel elle diminuera ; & il eſt évident que le terme où cette quantité paſſera de l'augmentation à la diminution, eſt en même temps celui où ſes valeurs immédiatement conſécutives ſont égales, & où ſa valeur eſt la plus grande poſſible : cela poſé,

Si dans $\frac{N.....\overline{N-x+1}}{1.2.....x} \cdot \frac{n^x}{m^N} \cdot \frac{\overline{\quad}}{m-n}^{N-x}$, je ſubſtitue à x, les quantités $\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}$ & $\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m} - 1$; elle devient

$$P, \frac{N.....(N-\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}+1)}{1.2.3.....\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}} \cdot \frac{n^{\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}}}{m^N} \cdot \frac{\overline{\quad}}{m-n}^{N-\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}}$$

$$P', \frac{N...(N-\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}+2)}{1.2.3....(\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}-1)} \cdot \frac{n^{\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}-1}}{m^N} \cdot \frac{\overline{\quad}}{m-n}^{N-\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}+1} ;$$

d'où l'on voit que $P = P' \cdot \frac{N-\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}+1}{\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}} \cdot \frac{n}{m-n}$,

mais $\frac{N-\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}+1}{\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}} \cdot \frac{n}{m-n} = 1$, car

$(N-\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}+1) \cdot n = \overline{N+1} \cdot \frac{n}{m} \cdot \overline{m-n}$,

comme il eſt aiſé de s'en convaincre : donc $P' = P$; donc la plus grande valeur de la fonction variable $\frac{N.....\overline{N-x+1}}{1.2.....x} \cdot \frac{n^x}{m^N} \cdot \frac{\overline{\quad}}{m-n}^{N-x}$ eſt, lorſque

Digitized by Google

$x = \overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}$ ou $\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m} - 1$, ou le nombre entier intermédiaire entre ces deux valeurs, si ce sont des fractions. *C. Q. F. D.*

CXLVIII.

Coroll. Si $N\frac{n}{m}$ est un nombre entier $N\frac{n}{m} + \frac{n}{m}$ & $N\frac{n}{m} + \frac{n}{m} - 1$, ou bien $\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m}$ & $\overline{N+1} \cdot \frac{n}{m} - 1$ sont des fractions, & $N\frac{n}{m}$ est le seul nombre entier qu'il puisse y avoir entre ces 2 fractions; par conséquent le nombre de fois que le hazard spécifié doit le plus probablement arriver.

CXLIX.

Remarque. Si dans la quantité $\frac{N \ldots \overline{N-x+1}}{1 \cdot 2 \ldots \ldots x} \cdot \frac{n^x}{m^N} \cdot \overline{m-n}^{N-x}$, on substitue successivement à x tous les nombres entiers depuis 0 jusqu'à N, & si $N\frac{n}{m}$ est un nombre entier : non seulement la valeur acquise à cette quantité par la substitution de $N\frac{n}{m}$ à x est la plus grande possible; mais les valeurs acquises à la même quantité par la substitution de $N\frac{n}{m} \pm 1$ à x, sont après celles-là les plus grandes possibles; les valeurs acquises à la même quantité par la substitution de $N \cdot \frac{n}{m} \pm 2$ à x sont après ces dernieres les plus grandes possibles, ainsi de suite ; de maniere que la probabilité d'avoir dans N épreuves le hazard spécifié, un nombre de fois approchant de $N\frac{n}{m}$ équivaut presque à la certitude.

Digitized by Google

C L.

Pour rendre cette remarque ſenſible par des exemples : je ſuppoſe 1°. que $\frac{n}{m} = \frac{3}{5}$, & $N = 10$; la fonction $\frac{N.....\overline{N-x+1}}{1.2.....x} \cdot \frac{n^x}{m^N} \cdot \overline{m-n}^{N-x}$ devient $\frac{10.....\overline{11-x}}{1.2.....x} \cdot \frac{3^x}{5^{10}} \cdot 2^{10-x}$; ſubſtituant ſucceſſivement à x dans cette derniere expreſſion, les nombres

$$\left\{\begin{matrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\end{matrix}\right. ; \text{ elle devient } \left\{\begin{matrix}2\,0\,4+\frac{4}{5}\\3\,0\,7\,2\\2\,0\,7\,3\,6\\8\,2\,9\,4\,4\\2\,1\,7\,7\,2\,8\\3\,9\,1\,9\,1\,0+\frac{2}{5}\\4\,8\,9\,8\,8\,8\\4\,1\,9\,9\,0\,4\\2\,3\,6\,1\,9\,6\\7\,8\,7\,3\,2\\1\,1\,8\,0\,9+\frac{4}{5}\end{matrix}\right. : 1953125 ;$$

or la probabilité d'avoir le hazard ſpécifié $N\frac{n}{m}$ ou $N\frac{n}{m}+1$ ou $N\frac{n}{m}+2$ fois, eſt

$$\left\{\begin{matrix}2\,1\,7\,7\,2\,8+\\3\,9\,1\,9\,1\,0+\frac{2}{5}+\\4\,8\,9\,8\,8\,8+\\4\,1\,9\,9\,0\,4+\\2\,3\,6\,1\,9\,6+\end{matrix}\right\} : 1953125 = \frac{1755626+\frac{2}{5}}{1953125} ;$$

probabilité peu différente de la certitude.

2°. Je ſuppoſe que $\frac{n}{m} = \frac{3}{5}$ & que $N = 9$, l'expreſſion générale $\frac{N.....\overline{N-x+1}}{1.2.....x} \cdot \frac{n^x}{m^N} \cdot \overline{m-n}^{N-x}$ devient $\frac{2.....\overline{10-x}}{1.2.....x} \cdot \frac{3^x}{5^9} \cdot 2^{9-x}$: ſubſtituant ſucceſ-

ſivement à x, dans cette derniere expreſſion, les nombres

$$\left\{\begin{matrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\end{matrix}\right\}\text{; elle devient }\left\{\begin{matrix}&&&&5&1&2\\&&&&6&9&2\\&&&4&1&4&7&2\\&&1&4&5&1&5&2\\&&3&2&6&5&9&2\\&&4&8&9&8&8&8\\&&4&8&9&8&8&8\\&&3&1&4&9&2&8\\&&1&1&8&0&9&8\\&&&1&9&6&8&3\end{matrix}\right\}:1953125;$$

or la probabilité d'avoir le hazard ſpécifié un nombre de fois qui ne differe de $N\frac{n}{m}$ que d'une quantité moindre que 2, eſt

$$\left\{\begin{matrix}3&2&6&5&9&2&+\\4&8&9&8&8&8&+\\4&8&9&8&8&8&+\\3&1&4&9&2&8\end{matrix}\right\}:1953125=\frac{16212096}{1953125},$$

qui differe peu de l'unité ou de la certitude.

3°. Si $\frac{n}{m}=\frac{2}{3}$ & $N=10$; l'expreſſion générale devient $\frac{10.....\overline{11-x}}{1.2.....x}.\frac{2^x}{3^{10}}$; dans laquelle ſubſtituant à x

$$\left\{\begin{matrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\end{matrix}\right\}\text{; elle devient }\left\{\begin{matrix}&&&&&1\\&&&&2&0\\&&&1&8&0\\&&&9&6&0\\&&3&3&6&0\\&&8&0&6&4\\&1&3&4&4&0\\&1&5&3&6&0\\&1&1&5&2&0\\&&5&1&2&0\\&&1&0&2&4\end{matrix}\right\}:59049;$$

or la probabilité d'avoir en 10 épreuves le hazard ſpécifié, le nombre $N\frac{n}{m}$ de fois à 1 près, eſt

$\left\{\begin{array}{r} 13440+ \\ 15360+ \\ 11520+ \end{array}\right\} : 59049 = \frac{40320}{59049}$ qui differe peu de l'unité : & la probabilité d'avoir ce hazard le nombre de fois $N\frac{n}{m}$ à 2 près, eſt

$\left\{\begin{array}{r} 8064+ \\ 40320+ \\ 5120 \end{array}\right\} : 59049 = \frac{53504}{59049}$ qui differe encore moins de l'unité.

4°. Si $\frac{n}{m} = \frac{1}{1000}$, & $N=2$; la probabilité d'amener dans les deux épreuves le hazard ſpécifié ;

$\left\{\begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right.$ fois ; eſt $\left\{\begin{array}{r} 998001 \\ 1998 \\ 1 \end{array}\right\} : 1000000$; d'où l'on voit que la probabilité que le hazard n'arrivera pas du tout dans les deux épreuves, eſt $\frac{998001}{1000000}$, qui approche fort de la certitude ; parce que dans ce cas 0 eſt le nombre entier intermédiaire entre les fractions $\overline{N+1}\frac{n}{m}$, $\frac{3}{1000}$ & $\overline{N+1}.\frac{n}{m} - 1$, $-\frac{997}{1000}$.

CLI.

COROLL. I. Si l'acte, mouvement ou état de choſes duquel dépend un hazard ſpécifié, eſt réitéré un certain nombre N de fois ; il eſt preſque certain que ce hazard arrivera un nombre de fois M, tel que la fraction $\frac{M}{N}$ approchera fort de la probabilité exacte $\frac{n}{m}$ de ce même hazard : car faiſant $\frac{M}{N} = \frac{n}{m}$; on en déduit $M = N \cdot \frac{n}{m}$.

CLII.

COROLL. II. Si l'on ignore & qu'on ne puiſſe

Digitized by Google

trouver aucun moyen d'évaluer exactement la probabilité d'un hazard spécifié, on peut en conséquence des principes ci-dessus établis, avoir, d'après des expériences ou observations, presque certainement cette probabilité approchée. Pour y parvenir, on réitérera ou l'on observera le plus grand nombre de fois qu'il sera possible ou commode, l'acte, mouvement ou état de choses duquel ce hazard dépend : & nommant N le nombre de ces expériences ou observations, M le nombre de fois que ce hazard sera arrivé; on prendra la fraction $\frac{M}{N}$ pour la probabilité cherchée.

Par exemple. Si Pierre ayant joué 300 parties d'échecs contre Paul, en a gagné 136; je pourrai prendre $\frac{136}{300}$ ou $\frac{34}{75}$ pour la probabilité que Pierre gagnera la premiere partie d'échecs qu'il jouera contre Paul; & je serai presque assuré que cette probabilité ne sera pas considérablement éloignée de la véritable.

CLIII.

L'USAGE de cette méthode exige deux précautions essentielles dont l'une regarde le nombre, l'autre la qualité des expériences ou observations desquelles on veut déduire la probabilité qu'il importe de connoître.

CLIV.

1°. SI LE nombre de ces expériences est très-petit, & qu'aucune n'ait donné le hazard dont on cherche la probabilité; non-seulement on ne peut en conclure rigoureusement que ce hazard est impossible; mais on n'est pas même assuré qu'il n'ait un certain degré de probabilité. Si au contraire, ce hazard est arrivé à toutes les épreuves; loin d'en

Digitized by Google

pouvoir conclure à la rigueur que le hazard doit néceſſairement arriver, on n'eſt pas même aſſuré que ſa probabilité ſoit bien grande.

Mais ſi le nombre des expériences eſt très-grand, on pourra conclure avec beaucoup de vraiſemblance; dans le premier cas, que le hazard dont il s'agit eſt ſinon abſolument impoſſible, du moins très-peu probable; & dans le 2e. cas, que ce hazard eſt ſinon rigoureuſement certain, du moins d'une très-grande probabilité.

CLV.

Il ne doit y avoir dans les divers mouvements, actes ou états de choſes comparés, aucune différence connue & ſenſible avec celui duquel dépend le hazard dont on cherche la probabilité, qui puiſſe faire préſumer un événement plus qu'un autre:

Par exemple: Si je veux par la méthode dont il s'agit, chercher la probabilité d'amener ſonnet avec deux dés à jouer ordinaires que j'ai en main; je ferai les expériences néceſſaires avec ces mêmes dés, ou avec des dés qui n'auront avec ceux-là aucune différence connue; tels que ſeroient des dés pipés, ou que je ſaurois être conformés de maniere à devoir amener plus ſouvent tel point qu'un autre de même probabilité.

De même ſi ſur 3000 octogénaires que j'ai connus, 60 ſeulement ſont parvenus à l'âge de 100 ans; en ſuivant la méthode actuelle, je pourrai prendre $\frac{60}{3000}$ ou $\frac{1}{50}$ pour la probabilité qu'un octogénaire inconnu vivra juſqu'à 100 ans; mais ſi je cherche la probabilité que Pierre qui a 80 ans, vivra juſqu'à 100, ſachant d'ailleurs que Pierre eſt infirme & attaqué d'une maladie dangereuſe; je rejetterai de mes obſervations, celles qui ont été faites ſur des octogénaires ſains & robuſtes, bor-

Digitized by Google

nant mon calcul à celles qui auront été faites ſur des vieillards du même âge, & à-peu-prés dans la poſition connue de Pierre; par quoi la probabilité que Pierre vivra juſqu'à 100 ans, deviendra peut-être nulle ou preſque nulle.

CLVI.

Il suit des deux propoſitions précédentes, que la méthode dont il s'agit, donnera d'autant plus d'eſpérance d'approcher de la véritable probabilité qu'on deſire de connoître, que les obſervations ou expériences dont on l'aura déduit, auront été plus multipliées; & qu'elles auront été faites ſur des actes, mouvements, ou états de choſes plus ſemblables à celui duquel dépend le hazard dont on cherche la probabilité.

CLVII.

Si dans le cours des expériences deſquelles on veut déduire la probabilité d'un hazard, on avoit remarqué que la fréquence des retours de ce hazard eût augmenté ou diminué progreſſivement: il faudroit ſuppoſer à cette variation ſucceſſive une cauſe dont il conviendroit de faire état autant qu'il ſeroit poſſible dans l'évaluation de la probabilité; ce qui ſe feroit à-peu-près de cette maniere: partager les expériences faites en pluſieurs époques conſécutives, contenantes chacune le même nombre d'expériences; ſuppoſer que la cauſe de la variation obſervée, n'agit point dans le cours des époques, mais ſeulement dans le paſſage d'une époque à l'autre; prendre ſuivant la méthode actuelle la probabilité du hazard dans chaque époque: ces probabilités formeront entre elles une ſuite de fractions qui auront le même dénominateur, & dont les numérateurs formeront une ſuite de nombres qui ſera ré-

Digitized by Google

guliere ou irréguliere : ſi cette ſuite eſt irréguliere, pour la rendre réguliere, on y fera les changements néceſſaires, mais les plus légers poſſibles ; cette ſuite étant rendue réguliere par cette voie, on l'augmentera d'un terme ; on prendra ce terme pour numérateur, & le dénominateur commun pour dénominateur ; & la fraction ainſi formée pourra être priſe avec quelque eſpérance d'une approximation raiſonnable pour la probabilité cherchée.

Par exemple : Pierre ayant joué contre Paul 408 parties de trictrac pendant leſquelles ils ſe ſont inégalement perfectionnés dans la ſcience du jeu ; il eſt arrivé que dans les 68 premieres parties, Pierre n'en a gagné que 12 ; dans les 68 ſuivantes 15, dans les 68 ſuivantes 19 ; dans les 68 ſuivantes 26 ; dans les 68 ſuivantes, 24, & enfin dans les 68 dernieres 31 ; la probabilité que Pierre avoit de gagner étoit, dans la 1re. époque $\frac{12}{68}$; dans la 2e. $\frac{15}{68}$; dans la 3e. $\frac{19}{68}$; dans la 4e. $\frac{26}{68}$; dans la 5e. $\frac{24}{68}$; & enfin dans la 6e. $\frac{31}{68}$.

Dans la ſuite 12, 15, 19, 26, 24, 31, des numérateurs je ſubſtitue les termes 24 & 28, aux termes 26 & 24, & elle devient 12, 15, 19, 24, 28, 31 qui eſt une ſuite réguliere, les différences des termes formant entre elles la ſuite 3, 4, 5, 4, 3 : je prendrai pour les 7e. 8e. 9e. 10e. termes &c. les nombres 33, 34, 34, 33, &c. j'aurai une ſuite réguliere où les différences des termes formeront la ſuite 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 0, —1, &c. & je prendrai $\frac{33}{68}$, $\frac{34}{68}$, $\frac{34}{68}$ pour les probabilités que Pierre gagnera dans les 7e. 8e. & 9e. époques.

LA

CLVIII.

La voie des expériences & obſervations peut être employée pour trouver les probabilités des hazards de toute eſpece, même de ceux dont la probabilité pourroit s'évaluer exactement par l'analyſe : il arrivera ſans doute très-ſouvent, que la probabilité ainſi trouvée différera beaucoup de la probabilité exacte donnée par l'analyſe : mais il faut conſidérer que dans les calculs, les inſtruments du hazard ſont ſuppoſés parfaits, c'eſt-à-dire, également capables de produire toutes les chances dont on fait l'énumération ; ce qui ne peut avoir lieu dans la pratique, où l'imperfection des inſtruments influe d'ordinaire beaucoup ſur l'événement. Or par la méthode actuelle, les imperfections des inſtruments du hazard ayant influé de fait ſur les réſultats obſervés ; les obſervations deſquelles on déduit les probabilités évaluent raiſonnablement ces imperfections dans le calcul : de ſorte qu'il n'eſt pas impoſſible & qu'on peut quelquefois préſumer avec fondement, que la probabilité évaluée par la voie des expériences approche davantage de la probabilité cherchée que celle qu'on auroit évaluée par une analyſe exacte.

Pour rendre ceci ſenſible par un exemple, je ſuppoſe que deux dés à jouer ordinaires ſont parfaitement cubiques, & de matiere également denſe dans toute l'étendue de leur ſolidité ; ſi ces deux dés ſont jettés au hazard ſur une table horiſontale, il eſt certain dans la théorie qu'il y a 36 réſultats également poſſibles. Mais s'il ſe trouve dans ces dés quelque irrégularité phyſique ; par exemple, ſi l'un de ces dés eſt de matiere plus denſe & par conſéquent plus peſante vers une face que vers les 5 autres ; ce dé (toutes choſes d'ailleurs égales) doit

Digitized by Google

tomber plus souvent sur cette face que sur les autres ; & par conséquent doit amener plus souvent le point opposé à cette face, qu'aucun des cinq autres points ; la méthode analytique devient donc fautive alors, & l'on peut lui préférer la méthode des expériences.

Pour y parvenir, je jetterai ces deux dés sur la table un nombre de fois suffisant, par exemple 144 fois ; & si dans le cours de ces 144 épreuves le point sonnet arrive 12 fois, & le point 5 & 4 seulement 6 fois ; je prendrai $\frac{12}{144}$ ou $\frac{1}{12}$ pour la probabilité d'amener sonnet avec ces dés, & $\frac{6}{144}$ ou $\frac{1}{24}$ pour la probabilité d'amener 5 & 4 ; & j'approcherai peut être davantage de la véritable valeur de ces probabilités que si je les évaluois à $\frac{1}{36}$ & $\frac{1}{18}$; parce qu'il est très-présumable que dans un grand nombre d'épreuves, la fréquence des retours de chaque hazard possible, est à-peu-près proportionelle avec la probabilité réelle de ce hazard.

C'est d'après cette maniere d'évaluer les probabilités qu'il arrive si fréquemment aux joueurs malheureux de changer de dés, de cartes, de coupes, de places, & d'employer avec succès divers autres moyens de changer les instruments du hazard, lorsque l'expérience leur a fait connoître le désavantage qui résulte pour eux de l'imperfection de ces instruments.

CLIX.

ON PEUT trouver, par la voie des expériences, la probabilité approchée des divers événements qui peuvent avoir lieu, non-seulement dans les jeux appellés proprement jeux de hazard, mais aussi dans les jeux mixtes où le hazard & le bien

Digitized by Google

joué combinés peuvent concourir plus ou moins à déterminer l'événement ; tels que le trictrac, le billard, la paume, la plupart des jeux de cartes appellés jeux de ſociété ; & enfin dans les jeux où le bien joué ſeul décide, tels que les échecs & autres.

CLX.

ON PEUT auſſi par cette méthode, au moyen d'un nombre ſuffiſant d'expériences ou d'obſervations bien choiſies, trouver la probabilité des divers événements phyſiques dont les cauſes occaſionelles ſont inconnues & qui ne ſont pas aſſujettis à des retours périodiques connus qui en rendent l'événement certain.

CLXI.

EXEMPLES. Pour trouver la probabilité qu'un homme actuellement âgé d'un nombre n d'années, vivra juſques à un nombre d'années exprimé par $n + p$; ſur les regiſtres mortuaires de la Ville, & s'il eſt poſſible, de la province qu'habite cet homme, je prends le nombre des perſonnes mortes après l'âge de n années, je fais de ce nombre le dénominateur de la probabilité cherchée ; je prends enſuite le nombre d'entre ces perſonnes qui ſont mortes après l'âge de $n + p$ années, & je fais de ce nombre le numérateur de cette même probabilité.

Par ce moyen : dans un pays où les regiſtres mortuaires datent d'un peu loin & ſont rédigés avec exactitude, on peut toujours trouver la probabilité, qu'une perſonne dont l'âge eſt connu vivra 1, 2, 3, ou un plus grand nombre d'années de plus ; & à quel âge on peut parier équitablement à miſes égales, que cette perſonne parviendra. D'après une ſuite d'obſervations ſemblables ; on pourra dreſ-

Digitized by Google

ſur pour chaque lieu des tables des probabilités de la vie humaine pour tous les âges, telles que celles qui ſe trouvent dans les œuvres de M. de Buffon.

De même, il eſt hors de doute que par une ſuite aſſez longue d'obſervations météorologiques, on ne puiſſe trouver pour chaque pays & chaque ſaiſon les probabilités des diverſes températures de l'air auxquelles on peut s'attendre, & peut-être reconnoître enfin, après un grand nombre d'années, dans ces viciſſitudes, des loix uniformes & des retours périodiques au moyen deſquels on pourroit fixer l'ordre de ces révolutions & les prévoir avec certitude.

CLXII.

ON PEUT encore, par cette méthode des obſervations & expériences, déterminer à-peu-près la probabilité des effets moraux réſultants de la combinaiſon des volontés, & par conſéquent des jugements & des intérêts humains dans des circonſtances données, ſoit qu'il s'agiſſe de conjecturer le réſultat des qualités connues d'un homme en particulier, ou des qualités connues de pluſieurs hommes réunis ou diviſés ſur un même objet.

CLXIII.

SI je voulois, par exemple, évaluer la probabilité du témoignage rendu par un homme dans une circonſtance donnée; je comparerois enſemble tous les témoignages vérifiés rendus par ce même homme, ou par d'autres ayant les mêmes intérêts & les mêmes lumieres à-peu-près, & dans des circonſtances à-peu-près ſemblables; je prendrois le nombre des témoignages comparés pour le dénominateur, & le nombre de ces témoignages reconnus véritables pour le numérateur de la probabilité cherchée.

Digitized by Google

CLXIV.

Et comme en ſuivant cette méthode, ni la probabilité, ni la certitude ne peuvent s'évaluer avec une exactitude géométrique, mais ſeulement avec la forte eſpérance d'une approximation raiſonnable; pour la diſtinguer de la probabilité & de la certitude géométriques, on les nomme *phyſiques*, lorſqu'il eſt queſtion d'événements naturels à la détermination deſquels la volonté humaine n'a aucunement participé; & *morales*, lorſqu'il eſt queſtion d'événements réſultants des actes de la volonté des hommes.

CLXV.

Enfin les obſervations & expériences peuvent ſervir à trouver la probabilité des aſſertions ou propoſitions générales & particulieres, ainſi que des opinions & ſyſtêmes, par la comparaiſon des faits qui ſemblent les confirmer avec ceux qui paroiſſent y contredire: & l'on ne doit pas déſeſpérer qu'au défaut des certitudes qui peut-être ne ſeront jamais données aux hommes, un nombre ſuffiſant d'expériences & d'obſervations joint à l'uſage judicieux que le génie en ſaura faire, ne puiſſent aſſujettir un jour la plupart des objets douteux des connoiſſances humaines, à une critique univerſelle & un genre de preuves unique, qui fixeroit ſur chaque opinion un degré d'aſſentiment uniforme, proportionné au degré de probabilité qui lui auroit été aſſigné.

Digitized by Google

CHAPITRE VII.

De l'influence des Témoignages sur les Probabilités.

§. CLXVI.

IL EST une troiſieme maniere d'évaluer la probabilité des faits ou des propoſitions, laquelle eſt fort en uſage dans le commerce ordinaire de la vie : c'eſt de les déduire de la valeur des témoignages par leſquels ces faits ſont affirmés ou niés. Or la force des témoignages tient non-ſeulement au nombre des témoins, mais à l'intégrité & aux lumieres de chacun d'eux : de maniere que la quantité ou valeur de ces qualités morales doit d'abord être exprimée dans le calcul, ſi l'on veut apprécier avec quelque juſteſſe le degré de probabilité réſultant d'un concours de témoignages. Nous allons eſſayer d'aſſigner briévement quelques-uns des principes qui nous ont ſemblé pouvoir ſervir de baſe à cette théorie, que nous n'oſerions garantir de toutes objections, & dont l'application peut paroître délicate.

CLXVII.

L'EXPÉRIENCE peut ſeule nous mettre à portée d'apprécier l'intenſité de lumieres & de droiture d'un témoin qui atteſte un fait ou qui le nie ; en conſéquence la probabilité de la véracité d'un témoignage rendu en une circonſtance donnée, ne peut guere ſe déduire que de la comparaiſon faite d'un grand

Digitized by Google

nombre de témoignages rendus par le même témoin, ou par d'autres ayant à-peu-près les mêmes passions, préjugés, habitudes, intérêts & lumieres; & dans des circonstances à-peu-près semblables, ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus (CLXIII.). Je suppose donc qu'en un nombre a de ces observations, le témoignage a été reconnu pour véritable un nombre de fois b, & qu'il a été reconnu pour faux dans toutes les autres; on pourra exprimer par $\frac{b}{a}$ la valeur du témoignage, c'est-à-dire, la probabilité qu'il est véritable.

CLXVIII.

On appelle *Poids*, ou *Valeur*, ou *Force* d'un témoignage, la quantité de son influence dans la probabilité du fait qu'il affirme; de même, le poids de plusieurs témoignages réunis est l'influence résultante de cette réunion dans la probabilité du fait affirmé par tous ces témoignages.

CLXIX.

Le poids d'un témoignage qui affirme un fait est proportionnel à la probabilité de ce témoignage, & peut toujours être exprimé par cette probabilité. Ainsi si la fraction $\frac{b}{a}$ est la probabilité du témoignage, $\frac{a}{b}$ exprimera le poids de ce même témoignage.

CLXX.

On nomme *irréprochable*, le témoignage dont le poids est le plus grand possible; c'est-à-dire, celui dont la probabilité est 1; on peut aussi le définir, celui qui est le plus capable de rendre certain le fait qu'il affirme, en supposant que ce fait ne soit pas reconnu d'ailleurs pour impossible, & que ce té-

Digitized by Google

moignage ne soit contredit par aucun autre témoignage.

CLXXI.

LORSQUE deux témoignages affirment un fait, le second ajoute au poids du premier une partie de ce qui lui manque pour être irréprochable, proportionnelle au poids du second; ou ce qui est de même, le second ajoute au poids du premier la partie de ce qui lui manque pour valoir 1, exprimée par le poids du second; ainsi $\frac{b}{a}$ étant le poids du premier témoignage, $\frac{d}{c}$ le poids du 2e, le poids des deux témoignages réunis sera $\frac{b}{a} + (1 - \frac{b}{a}) \cdot \frac{d}{c}$; ou $\frac{d}{c} + (1 - \frac{d}{c}) \cdot \frac{b}{a}$.

CLXXII.

LORSQUE trois témoignages affirment un fait, le 3e. ajoute au poids des 2 autres réunis la partie de ce qui lui manque pour valoir l'unité exprimée par le poids du 3e. Par exemple, si les poids des 3 témoignages sont $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{g}{f}$; le poids des trois témoignages réunis sera $\frac{b}{a} + (1 - \frac{b}{a}) \cdot \frac{d}{c} + (1 - \frac{b}{a} - \{1 - \frac{b}{a}\} \cdot \frac{d}{c}) \cdot \frac{g}{f}$; ainsi de suite, & en général:

Un nouveau témoignage qui affirme un fait, ajoute au poids de tous les autres témoignages réunis la partie de ce qui lui manque pour valoir l'unité exprimée par le poids du nouveau témoignage.

Ainsi si A est le poids des autres témoignages réunis, & $\frac{q}{p}$ le poids du dernier témoignage; le

poids de tous les témoignages réunis ſera, $A + (1 - A) \cdot \frac{q}{p}$.

CLXXIII.

De même quand pluſieurs témoignages nient un fait, chacun de ces témoignages ajoute au poids des autres réunis dans la probabilité que ce fait n'exiſte pas, la partie de ce qui manque à ce poids pour valoir l'unité exprimée par le poids de ce témoignage; ainſi ſi B eſt le poids de tous les autres témoignages niants, & $\frac{y}{x}$ le poids du dernier témoignage; le poids de tous les témoignages réunis dans la probabilité que le fait n'exiſte pas, eſt $B + (1 - B) \cdot \frac{y}{x}$.

CLXXIV.

Si l'un des témoignages affirmants eſt irréprochable, les autres ne peuvent rien ajouter à ſon poids, qui eſt le plus grand qu'un nombre quelconque de témoignages réunis puiſſe avoir; de même ſi l'un des témoignages eſt irréprochable, les autres témoignages niants ne peuvent rien ajouter à ſon poids, dans la probabilité que le fait nié n'exiſte pas, parce que ce poids eſt le plus grand poſſible.

CLXXV.

Par la même raiſon, ſi l'un des témoignages affirmants n'eſt d'aucun poids; c'eſt-à-dire, ſi ſa probabilité eſt égale à 0; il n'ajoutera rien au poids des témoignages affirmants; & un des témoignages niants dont le poids ſeroit nul, n'ajouteroit rien au poids des autres témoignages niants.

CLXXVI.

Lorsque pluſieurs témoignages affirment un

Digitized by Google

fait, & que plusieurs autres témoignages nient le même fait, le poids résultant de la réunion de ces témoignages contradictoires, est l'excès du poids des témoignages affirmants sur le poids des témoignages niants ; ou bien l'excès du poids des témoignages niants sur celui des témoignages affirmants : ainsi nommant A le poids des témoignages affirmants, B le poids des témoignages niants ; le poids résultant de tous ces témoignages de part & d'autre est $A-B$, ou $B-A$, ou o selon que $A>B$ ou que $A<B$ ou que $A=B$.

CLXXVII.

Si le poids des témoignages qui affirment un fait est plus grand que le poids des témoignages qui nient ce même fait ; l'excès du premier poids sur le second, ou ce qui est de même, le poids résultant de tous les témoignages pour & contre, augmente la probabilité de l'existence du fait : si au contraire le poids des témoignages niants l'emporte sur le poids des témoignages affirmants ; le poids résultant des témoignages pour & contre augmente la probabilité de la non-existence du fait attesté : enfin si le poids des témoignages affirmants est égal au poids des témoignages niants, le fait est réduit à sa probabilité propre ; c'est-à-dire, à celle qui peut lui être assignée indépendamment des témoignages.

CLXXVIII.

Lorsqu'un fait attesté a un degré de probabilité qui lui a été assigné par l'analyse ou l'expérience, indépendamment des témoignages, les témoignages rendus pour ou contre ce fait ajoutent à sa probabilité propre la partie de ce qui lui manque pour valoir la certitude, exprimée par l'excès du

Digitized by Google

poids des témoignages affirmants sur le poids des témoignages qui le nient.

CLXXIX.

THÉORÈME I. Si plusieurs témoignages dont les probabilités sont $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{g}{f}$, $\frac{i}{h}$, &c. affirment un fait : le poids de ces témoignages réunis est l'unité moins le produit des quantités $1-\frac{b}{a}$, $1-\frac{d}{c}$, $1-\frac{g}{f}$, $1-\frac{i}{h}$, &c. c'est-à-dire, $1-\left(1-\frac{b}{a}\right)\cdot\left(1-\frac{d}{c}\right)\cdot\left(1-\frac{g}{f}\right)\cdot\left(1-\frac{i}{h}\right)\cdots\cdots$

Dém. Le poids du premier témoignage est $\frac{b}{a}$ (CLXIX.) $=1-\left(1-\frac{b}{a}\right)\cdot$

Le poids des deux premiers témoignages est $\frac{b}{a}+\left(1-\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{d}{c}$ (CLXXI.) $=1-\left(1-\frac{b}{a}\right)+\left(1-\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{d}{c}=1-\left(1-\frac{b}{a}\right)\cdot\left(1-\frac{d}{c}\right)\cdot$

Le poids des trois premiers témoignages est $\frac{b}{a}+\left[1-\frac{b}{a}\right]\frac{d}{c}+\left\{1-\frac{b}{a}-\left[1-\frac{b}{a}\right]\cdot\frac{d}{c}\right\}\cdot\frac{g}{f}$ (CLXXII.) $=1-\left[1-\frac{b}{a}\right]\cdot\left[1-\frac{d}{c}\right]\cdot\left[1-\frac{g}{f}\right]$; ainsi de suite : donc, &c. *C. Q. F. D.*

CLXXX.

COROLL. I. Si plusieurs témoignages dont les probabilités sont $\frac{q}{p}$, $\frac{s}{r}$, $\frac{u}{t}$, &c. nient un fait; le poids de ces témoignages réunis dans la probabilité de la non-existence du fait est $1-\left(1-\frac{q}{p}\right)\cdot\left(1-\frac{s}{r}\right)\cdot\left(1-\frac{u}{t}\right)\cdots\cdots$

CLXXXI.

COROLL. II. Si plusieurs témoignages dont les

Digitized by Google

probabilités ſont $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{g}{f}$, &c. affirment un fait, & que pluſieurs autres témoignages dont les probabilités ſont $\frac{q}{p}$, $\frac{s}{r}$, $\frac{u}{t}$, &c. nient ce même fait : nommant A le produit $(1-\frac{b}{a})\cdot(1-\frac{d}{c})\cdot(1-\frac{g}{f})\ldots\ldots$, & B, le produit $(1-\frac{q}{p})\cdot(1-\frac{s}{r})\cdot(1-\frac{u}{t})\ldots\ldots$: Le poids de ces témoignages contradictoires ſera $1-A-1+B$, ou $B-A$, ſi $B>A$; & ce poids augmentera la probabilité propre du fait : Au contraire, le poids de ces témoignages ſera $1-B-1+A$, ou $A-B$, ſi $B<A$, & ce poids augmentera la probabilité de la non-exiſtence du fait : enfin ſi $A=B$, le poids des témoignages ſera nul, & ne pourra augmenter ni diminuer la probabilité propre du fait. (CLXXVI.)

CLXXXII.

REMARQUE. On voit par les formules trouvées aux trois propoſitions précédentes; 1°. que la fraction repréſentée par $\left\{\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right.$ eſt d'autant plus petite & par conſéquent le poids des témoignages $\left\{\begin{matrix}\text{affirmants}\\\text{niants}\end{matrix}\right.$ d'autant plus grand que les témoignages particuliers $\left\{\begin{matrix}\text{affirmants}\\\text{niants}\end{matrix}\right.$ ont plus de probabilité ou de poids & ſont en plus grand nombre; 2°. que ſi quelqu'un de ces témoignages eſt de nulle valeur, c'eſt-à-dire, ſi ſon poids eſt égal à 0, il n'ajoute & n'ôte rien aux poids des autres; 3°. que ſi entre les témoignages affirmants, un ou pluſieurs ſont irréprochables, on a $A=0$, & le poids des témoignages dans la probabilité de l'exiſtence du fait ſera B; 4°. que ſi entre les témoignages niants, un ou pluſieurs ſont irréprochables, on a $B=0$, & le poids des té-

Digitized by Google

moignages dans la probabilité de la non-existence du fait sera A. 5°. Enfin, que si un ou plusieurs d'entre les témoignages affirmants sont irréprochables, & que un ou plusieurs des témoignages niants le soient aussi; on a $A=B=0$; & le fait attesté se trouve réduit à sa probabilité propre; c'est-à-dire, à celle qui peut lui être assignée indépendamment des témoignages.

CLXXXIII.

Lorsqu'on a assigné à un fait un degré de probabilité fondé sur l'analyse ou les expériences & indépendant des témoignages; les témoignages qui affirment ce fait, ou l'excès du poids de ceux qui l'affirment sur le poids de ceux qui le nient, augmentent sa probabilité propre d'une partie de ce qui lui manque pour valoir l'unité; & cette partie augmentée est proportionnelle non-seulement au poids des témoignages, ainsi qu'il a déja été observé (CLXXVIII.), mais aussi au degré de probabilité propre de ce fait. Ce principe tient à la différence d'assentiment que nous donnons naturellement au même témoin, qui est toujours proportionnelle à la probabilité ou vraisemblance que nous avons assignés par nous-mêmes au fait attesté. En effet je croirois beaucoup plus à celui qui viendroit m'annoncer, que dans 30 jets de deux dés à jouer il n'a amené qu'une fois sonnet, que je ne croirois au même homme s'il m'annonçoit, que dans cent jets de ces deux dés il a amené sonnet à tous coups, & le degré de persuasion restant au témoignage seroit en proportion du degré de probabilité du fait affirmé.

CLXXXIV.

Il suit de ce principe que le degré de proba-

Digitized by Google

bilité ajouté par des témoignages à la probabilité propre d'un fait eſt en raiſon compoſée 1°. de la différence de l'unité à la probabilité propre du fait atteſté ; 2°. du poids des témoignages qui affirment le fait, ou de l'excès du poids de ceux qui l'affirment ſur le poids de ceux qui le nient ; 3°. de la probabilité propre du fait.

CLXXXV.

THÉORÊME II. Nommant $\frac{n}{m}$ la probabilité propre d'un fait, & P l'excès des poids des témoignages qui l'affirment ſur le poids de ceux qui le nient : je dis que la probabilité du fait devient par ces témoignages égale à $1-(1-\frac{n}{m})\cdot(1-\frac{n}{m}P)$.

DÉMONST. Suivant la propoſition précédente, les témoignages ajoutent à la probabilité propre du fait le degré de probabilité exprimé par $(1-\frac{n}{m})\cdot P\cdot\frac{n}{m}$; donc la probabilité de ce fait après les témoignages, eſt $\frac{n}{m}+(1-\frac{n}{m})\cdot P\cdot\frac{n}{m}=1-(1-\frac{n}{m})\cdot(1-\frac{n}{m}\cdot P)$. *C. Q. F. D.*

CLXXXVI.

SI LE POIDS des témoignages eſt nul, c'eſt-à-dire, ſi $P=0$; la formule ci-deſſus devient $1-(1-\frac{n}{m})$ ou $\frac{n}{m}$; ou ce qui eſt de même, le fait eſt réduit à ſa probabilité propre : ſi au contraire $P=1$, la probabilité du fait deviendra $1-(1-\frac{n}{m})^2$; d'où il ſuit qu'un nombre quelconque de témoignages même irréprochables ne ſuffiſent pas pour rendre abſolument certain un fait qui ne l'eſt pas par lui-même, & indépendamment des témoignages.

Digitized by Google

CLXXXVII.

Si le fait eſt certain par lui-même, c'eſt-à-dire, ſi ſa probabilité propre $\frac{n}{m} = 1$: la formule ci-deſſus ſe réduit à 1, quelle que ſoit la valeur de P: ſi au contraire $\frac{n}{m} = 0$, cette formule ſe réduit à 0, quelle que ſoit la valeur de P; d'où il ſuit qu'un nombre quelconque de témoignages même irréprochables ne peut donner la plus légere probabilité à un fait qui par lui-même eſt reconnu pour impoſſible.

CLXXXVIII.

Théorême III. Nommant toujours $\frac{n}{m}$ la probabilité propre d'un fait, & Q l'excès du poids des témoignages qui nient ce fait ſur le poids des témoignages qui l'affirment; je dis que la probabilité du fait devient, après ces témoignages, $1 - (1 - \frac{n}{m}) \cdot (1 + \frac{n}{m} \cdot Q)$.

Démonst. Suivant la propoſition (CLXXXIV.) les témoignages ajoutent à la probabilité $1 - \frac{n}{m}$ de la non-exiſtence du fait, le degré de probabilité exprimé par $\frac{n}{m} \cdot Q \cdot (1 - \frac{n}{m})$; donc la probabilité de la non-exiſtence du fait devient, après les témoignages, $\left[1 - \frac{n}{m}\right] + \frac{n}{m} \cdot Q \cdot \left[1 - \frac{n}{m}\right] = \left[1 - \frac{n}{m}\right] \cdot \left[1 + \frac{n}{m} Q\right]$; & par conſéquent la probabilité du fait devient $1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right] \cdot \left[1 + \frac{n}{m} Q\right]$; *C. Q. F. D.*

CLXXXIX.

Si le poids des témoignages eſt nul, c'eſt-à-dire, ſi $Q = 0$, la formule ci-deſſus ſe réduira à $\frac{n}{m}$, &

Digitized by Google

le fait ſera réduit à ſa probabilité propre ; ſi $Q=1$, cette formule deviendra $1-\left[1-\frac{n}{m}\right]\cdot\left[1+\frac{n}{m}\right]$ $=1-1+\frac{n^2}{m^2}=\frac{n^2}{m^2}$; d'où il ſuit qu'un nombre quelconque de témoignages même irréprochables ne peut anéantir entiérement la probabilité propre d'un fait qui n'eſt pas abſolument impoſſible.

CXC.

Si $\frac{n}{m}=0$; cette formule deviendra 0 ; Si $\frac{n}{m}=1$, elle devient 1, d'où il ſuit qu'un nombre quelconque de témoignages qui nient un fait, fuſſent-ils irréprochables, ne peut diminuer la certitude acquiſe à ce fait par l'analyſe ou l'expérience.

CXCI.

NOMMANT toujours $\frac{n}{m}$ la probabilité d'un fait indépendante des témoignages ; de plus repréſentant par $1-A$ le poids des témoignages qui affirment ce fait, & par $1-B$ le poids des témoignages qui le nient ; la probabilité du fait après les témoignages tels qu'ils ſoient, ſera toujours $1-\left[1-\frac{n}{m}\right]\cdot\left[1-\frac{n}{m}\cdot\overline{A-B}\right]$; car $B-A$ ſera l'excès du poids des témoignages affirmants ſur le poids des témoignages niants ; & $A-B$ ſera l'excès du poids des témoignages niants ſur celui des témoignages affirmants : ſubſtituant donc $B-A$ à P dans la formule $1-\left[1-\frac{n}{m}\right]\cdot\left[1-\frac{n}{m}\cdot P\right]$ trouvée par le théorême 2e, cette formule devient $1-\left[1-\frac{n}{m}\right]\cdot\left[1-\frac{n}{m}\cdot\overline{B-A}\right]$.

De même, ſubſtituant $A-B$ à Q dans la formule

1 —

$1-\left[1-\frac{n}{m}\right]\cdot\left[1+\frac{n}{m}\cdot Q\right]$ du théorême 3e. cette formule devient encore $1-\left[1-\frac{n}{m}\right]\cdot\left[1+\frac{n}{m}\cdot\overline{A-B}\right]$ qui eſt égale à $1-\left[1-\frac{n}{m}\right]\cdot\left[1-\frac{n}{m}\cdot\overline{B-A}\right]$.

CXCII.

Il ſuit des propoſitions (CLXXXVI. & CLXXXIX.), que la fraction $\frac{n}{m}\cdot\left[1-\frac{n}{m}\right]$ eſt en même temps la plus grande augmentation poſſible que les témoignages qui affirment un fait puiſſent ajouter à la probabilité propre $\frac{n}{m}$ de ce fait, & la plus grande diminution que cette même probabilité puiſſe ſouffrir des témoignages qui le nient; car nommant x la plus grande augmentation poſſible de cette probabilité, on a $\frac{n}{m}+x=1-\left[1-\frac{n}{m}\right]^2=1-1+2\frac{n}{m}-\frac{n^2}{m^2}$, d'où l'on tire $x=\frac{n}{m}-\frac{n^2}{m^2}=\frac{n}{m}\cdot\left[1-\frac{n}{m}\right]$.

De même nommant y la plus grande diminution poſſible de cette même probabilité, on a $\frac{n}{m}-y=\frac{n^2}{m^2}$; donc $y=\frac{n}{m}-\frac{n^2}{m^2}=\frac{n}{m}\cdot\left[1-\frac{n}{m}\right]$.

CXCIII.

Les 2 propoſitions qui viennent d'être citées, font connoître que tous les témoignages poſſibles pour ou contre un fait ſont inſuffiſants pour établir à ce fait une probabilité exacte, lorſqu'on n'a d'ailleurs aucune voie d'analyſe ni d'expériences pour donner à ce fait un degré de probabilité qui lui ſoit propre: ce qui eſt évident; puiſque des témoigna-

ges même irréprochables ne suffisent, ni pour rendre entiérement certain un fait même très-probable; ni pour établir l'impossibilité absolue d'un fait qui n'a qu'une très-petite probabilité.

CXCIV.

Il suit delà, qu'en supposant qu'on ne puisse assigner à un fait un degré de probabilité qui lui soit propre, on tomberoit dans l'erreur de prendre pour probabilité de ce fait, ou le poids des témoignages qui l'affirment, ou l'excès du poids de ceux qui l'affirment sur le poids de ceux qui le nient : un seul exemple suffira pour s'en convaincre. Je suppose qu'un fait de cette espece est affirmé par des témoignages dont le poids est $\frac{2}{3}$ & nié par des témoignages dont le poids est $\frac{1}{3}$; si l'on prenoit $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{3}$ pour la probabilité du fait ; $1 - \frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ seroit la probabilité que le fait n'existe pas; par quoi les probabilités des faits contradictoires affirmés se trouveroient en raison inverse des poids des témoignages qui les affirment : ce qui est manifestement absurde : cette remarque fait connoître sensiblement l'insuffisance des autorités pour fonder des conjectures sur des faits, dont la raison, ni l'expérience ne donnent aucun moyen d'examiner la nature, & dont nous ne sommes pas en état d'apprécier la probabilité indépendamment de ces autorités.

CXCV.

L'influence qui vient d'être assignée aux témoignages sur la probabilité des faits attestés, suppose que le témoin prétend avoir vérifié par lui-

Digitized by Google

même, & tenir pour certain le fait qu'il affirme; mais si ce fait n'est que probable pour celui qui me l'annonce; comme dans le cas où il l'auroit lui-même appris d'un autre témoin; alors la probabilité que le témoignage donne au fait attesté est composée de la probabilité du témoignage qui me l'annonce & de celle du témoignage antérieur qui a donné lieu à celui-là. Supposant donc que $\frac{n}{m}$ est la probabilité propre du fait; $\frac{b}{a}$ le poids du témoignage qui me l'annonce; $\frac{d}{c}$ le poids du témoignage antérieur qui a donné lieu à celui-là; la probabilité du fait deviendra, par ces témoignages, $\frac{n}{m} + \left[1 - \frac{n}{m}\right] \cdot \frac{n}{m} \quad \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c}$;

Et si le témoin antérieur, au lieu de donner son témoignage comme directement certifié, l'a reçu lui-même d'un troisieme témoin dont le poids est $\frac{g}{f}$; la probabilité du fait deviendra $\frac{n}{m} + \left[1 - \frac{n}{m}\right] \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} \cdot \frac{g}{f}$, Ainsi de suite.

CXCVI.

Un témoignage rendu en conséquence d'un autre témoignage que j'ai reçu moi-même directement n'ajoute rien pour moi au poids de ce témoignage que j'ai reçu; ainsi lorsqu'un fait m'a été affirmé par Pierre; Paul qui a reçu le même témoignage de Pierre, n'ajoute rien en me le rapportant à l'influence du témoignage de Pierre sur la probabilité que j'ai du fait.

CXCVII.

Un témoignage authentiquement consigné dans un écrit, conserve la probabilité qu'il avoit dans

l'origine lorſqu'il a été oralement rendu par le témoin ; & il la conſerve autant de temps que l'authenticité de l'écrit reſte certaine ; mais lorſque cette authenticité n'eſt plus que probable, le poids du témoignage, pour être évalué juſte, doit ſe multiplier par la probabilité de l'authenticité de l'écrit dans lequel il eſt conſigné.

FIN.

Digitized by Google

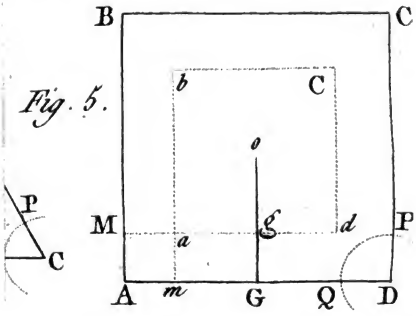


Fig. 5.

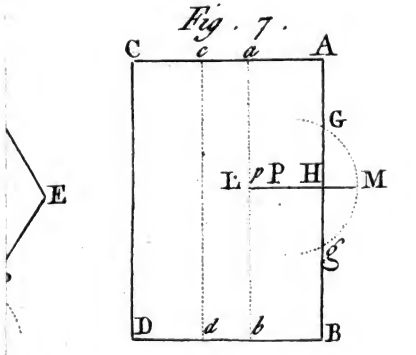


Fig. 7.

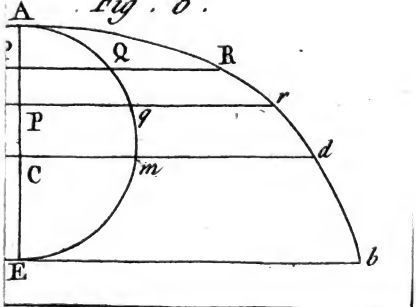


Fig. 8.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06360 9435

A 543473

Digitized by Google